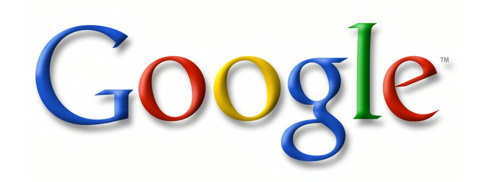










MÉCANIQUE

PHYSIQUE.

MÉCANIQUE PHYSIQUE.

OU

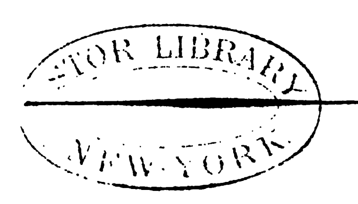
TRAITÉ EXPÉRIMENTAL ET RAISONNÉ

DU MOUVEMENT ET DE L'ÉQUILIBRE

Considérés dans les corps solides.

Par JOSEPH MOLLET,

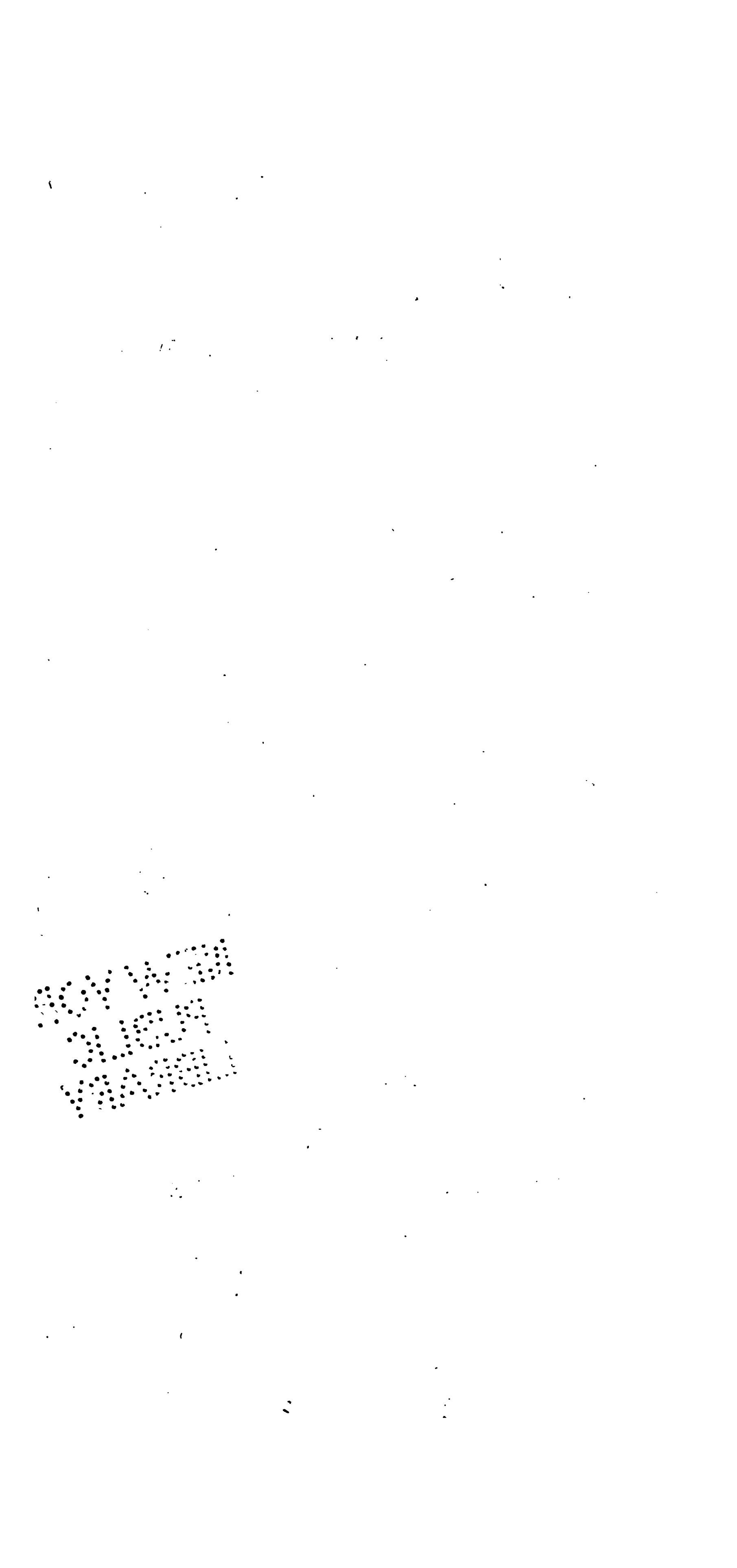
Ci-devant Doyen de la Faculté des Sciences, et Professeur de Mathématiques appliquées à l'Académie de Lyon, Professeur de Physique et de Géométrie au Musée de la même ville; de l'Académie de Lyon, de celle de Marseille, et de la Société académique de la ville d'Aix.



AVIGNON,

Chez SEGUIN aîné, Imprimeur-Libraire.

1818.



PRÉFACE.

Nous possédons tant de bons Ouvrages sur la Mécanique, qu'un nouveau livre sur cette matière paraît d'abord superflu. En effet que peut-on désirer de mieux que le Traité de l'abbé Marie, ou ceux plus modernes de MM. Francœur et Poisson ? Mais si ces Ouvrages sont parfaits dans leur genre, il faut convenir aussi qu'ils ne sont accessibles qu'à peu de lecteurs. Une connaissance profonde de la Géométrie et de la Science du calcul est nécessaire pour leur intelligence ; et ils ne sauraient par conséquent convenir qu'au petit nombre de ceux qui ont pu acquérir cette instruction préliminaire. Cependant il importe que les principes de la Mécanique soient répandus le plus qu'il se peut. Il y a une foule de personnes qui ont besoin de les connaître : les manufacturiers, les architectes, ceux qui exploitent des mines, des carrières, qui conduisent des ateliers, qui exercent enfin quelque art mécanique, ne sauraient s'en passer, et s'il n'existait sur cette matière que des Ouvrages aussi profonds que ceux que je viens de citer, toute cette classe nombreuse, et qui rend à la société de si grands services, serait privée d'une connaissance qui lui est extrêmement nécessaire.

Il était donc à désirer qu'il existât aussi sur la Mécanique un Ouvrage plus facile et moins abstrait, un Ouvrage où les principes de cette Science fussent mis à la portée du commun des lecteurs, et rendus en quelque sorte plus vulgaires. C'est ce que j'ai essayé de faire dans le Traité que je publie aujourd'hui. J'ai cherché à présenter les choses sous une forme plus simple, et à les mettre dans un jour plus facile à saisir. J'ai voulu apprendre à tout le monde les régles de la Mécanique, et les répandre surtout parmi la classe nombreuse qui a besoin de les connaître, et qui doit en faire l'application. Mon ambition a été d'être utile : ma gloire serait d'y avoir réussi. Je sais bien que les Mathématiciens verront avec indifférence un Ouvrage dont on a écarté, autant qu'il se pouvait, les formes des Mathématiques. Mais les amis des Sciences physiques ne liront peut-être pas sans intérêt un livre, où l'on s'efforce d'exposer avec clarté et simplicité une Science difficile et abstraite, et où l'on appelle souvent l'expérience au secours de la théorie.

Dans tous les Traités de Physique publiés pendant le dernier siècle, la Mécanique occupait une place considérable. On ne pensait point alors qu'il fallut laisser aux seuls Mathématiciens l'enseignement de cette Science importante : on sentait que la connaissance en aurait été ainsi concentrée entre un trop petit

nombre de personnes. Les Physiciens se chargeaient donc aussi d'en démontrer les principes soit par le simple raisonnement, soit par le moyen de l'expérience. Ces Traités de Mécanique vulgaire et expérimentale auraient peut-être paru suffisans. Mais d'abord ils font partie d'Ouvrages assez considérables, et qui sont coûteux. En second lieu on peut dire qu'ils sont généralement incomplets, parce que leurs auteurs n'ont traité cette matière que d'une manière partielle, et pour ainsi dire, accessoire. Un nouveau livre sur ce sujet fait dans le même esprit, mais plus étendu et plus complet que ceux dont on vient de parler, m'a donc paru devoir être encore de quelque utilité; et je l'offre avec confiance aux amis des connaissances pratiques, et à tous ceux qui aiment ou professent les arts mécaniques.

Ce que je viens de dire explique suffisamment le motif du titre donné à mon Livre. En effet puisqu'il y a une *Astronomie physique*, c'est-à-dire une Astronomie qui enseigne les lois des phénomènes célestes dépouillées des épines du calcul, pourquoi n'y aurait-il pas aussi une *Mécanique physique*, où seraient exposées les lois de l'équilibre et du mouvement, sans tout cet appareil de démonstrations et de formules, qui rebutent la plupart des lecteurs. Cependant je n'ai pas voulu supprimer entièrement les expressions algébriques, dont

la brièveté et la précision sont si avantageuses : mais je ne les ai employées qu'avec la plus grande sobriété, et presque toujours dans des Notes, qu'on est le maître de lire ou de laisser. Par ce moyen j'ai cru pouvoir satisfaire tous les goûts, et donner à mon Ouvrage un mérite de plus, qui ne sera pas dédaigné de ceux qui ont quelques notions des Mathématiques, et qui aiment les démonstrations rigoureuses.

La *Mécanique physique* jointe à l'Ouvrage que j'ai publié, il y a quelques années, et auquel j'ai donné le titre d'*Hydraulique physique*, forme un Traité complet de l'équilibre et du mouvement considérés dans les solides et dans les fluides. Si à ces deux Ouvrages l'on ajoute mon *Étude du Ciel*, qui est véritablement une *Astronomie physique*, on aura un cours de *Physique générale*, qui pourra servir de complément au Cours de Physique de M.r Haüy. En parlant ainsi, je ne prétends point me mettre en parallèle avec cet illustre savant. Je reconnais que son Ouvrage est d'un mérite supérieur. Mais comme l'auteur s'est en quelque sorte borné à la *Physique spéciale*, et qu'il a cru devoir écarter de son plan toute la partie *physico-mathématique*, c'est à celle-ci que je me suis uniquement attaché, dans la persuasion où je suis, qu'elle doit entrer comme partie intégrante dans l'enseignement général de la Physique.

CONSIDÉRATIONS

PRÉLIMINAIRES

SUR LA CONSTITUTION DES CORPS SOLIDES.

L'*étendue* et l'*impénétrabilité* sont les deux propriétés principales des corps : elles leur sont tellement essentielles, qu'il est impossible de les concevoir dépourvus de l'une ou de l'autre. On ne saurait en effet se figurer un corps qui ne serait point étendu, ou qui se laisserait pénétrer par un autre corps, de manière à occuper avec celui-ci le même lieu dans le même temps. Tous les corps doivent donc être considérés comme composés de parties placées les unes hors des autres, et remplissant ainsi une certaine portion d'espace.

Les parties des corps peuvent être séparées par différens moyens. En employant la lime ou le pilon on peut réduire un corps en parcelles extrêmement petites : mais ces parcelles sont encore visibles et palpables ; et dans le vrai ce sont de petits corps composés eux-mêmes de parties encore plus petites. La division sera poussée plus loin, si l'on a recours à un dissolvant physique : l'on parviendra alors à des molécules d'une telle petitesse, qu'elles échapperont absolument à la vue et au toucher. Ces molécules seront de la même nature que le corps dont elles faisaient partie, et s'appellent les molécules *intégrantes* du corps. A ce point toute division ultérieure cesse d'être possible ; et quoiqu'il soit certain que les

molécules intégrantes ont quelque étendue, et que l'esprit les conçoive comme pouvant encore être divisées, cependant il est également constant, qu'aucune division physique ne peut s'effectuer sur elles, et qu'elles doivent par conséquent être considérées comme les premiers élémens des corps sensibles.

Les molécules intégrantes des corps étant d'une petitesse qui les dérobe tout-à-fait à notre connaissance, il n'est pas étonnant que nous ne puissions pas savoir quel est le nombre de ces molécules contenues dans un corps d'un volume connu. Nous ignorons également quelle est la figure de ces particules primitives des corps, quoiqu'il paraisse assuré qu'elles sont toutes semblables et figurées de même dans un corps de nature donnée. C'est au moins une conséquence qu'on peut tirer de la forme constante qu'affectent les différens corps, lorsque leur formation s'est faite en toute liberté et qu'elle n'a été troublée par aucune force étrangère. Dans ce cas nous voyons les corps façonnés en *polyèdres*, et doués de formes géométriques, constantes dans chaque espèce, et différentes d'une espèce à l'autre. Il est évident que ces formes doivent dépendre de la figure particulière des molécules intégrantes, et de la manière dont elles se sont arrangées entre elles.

Lorsqu'un corps est doué de cette forme régulière, on l'appelle un *crystal*, et l'on nomme *crystallisation* l'opération par laquelle il a été produit. Les physiciens et les géomètres ont cherché à expliquer l'origine et la formation des crystaux : mais personne n'a répandu plus de jour sur cette matière que l'illustre M. Haüy. Ce savant distingué est parvenu avec une patience et une adresse admirables à *disséquer*, pour ainsi dire, les

crystaux, et il est remonté de cette manière jusqu'à leurs premiers rudimens. Il a prouvé : 1.° que tout crystal était composé d'un noyau de forme constante dans chaque espèce ; 2° que ce noyau étoit formé de molécules toutes douées de la même forme ; 3.° que d'autres molécules pareilles à celles-là, en s'arrangeant autour du noyau de différentes manières et dans un certain ordre, donnaient enfin au crystal sa forme extérieure et sensible, qui différait souvent beaucoup de la forme du noyau, quoiqu'elle en dérive nécessairement.

Il est donc constant que des molécules de la même espèce, d'abord isolées, mais libres et suffisamment rapprochées, s'attachent les unes aux autres, et forment par leur réunion des corps solides doués d'une certaine forme régulière. Mais quelle est la force qui les oblige à s'unir ainsi, et en général qui lie entre elles les particules des corps solides ? c'est ici une question importante, et qui demande à être examinée avec quelque soin.

Pour expliquer l'adhésion mutuelle des particules des corps, quelques-uns ont eu recours à une action extérieure et mécanique. On avait d'abord pensé que cet effet était produit par la pression du fluide atmosphérique dans lequel tous les corps sont plongés. Mais aussitôt après l'invention de la machine pneumatique, on fut bientôt certain que l'adhésion était la même dans le vide qu'au milieu de l'air. Il fallut alors recourir à un autre fluide plus subtil que l'air, que l'on supposa présent partout et auquel on donna le nom *d'éther*. On voit bien comment un fluide peut, par la pression qu'il exerce dans tous les sens, s'opposer à la séparation des parties qui sont déjà unies : mais on ne voit

pas comment il pourrait déterminer l'union de celles qui sont encore libres et indépendantes. Après avoir donc admis une force qui maintient la liaison des particules des solides, il faudrait en imaginer une autre, pour expliquer comment cette liaison a pu s'effectuer. Mais cette dernière force, comme il est évident, par la seule continuité de son action, suffit pour rendre également raison de l'autre fait. Par conséquent c'est à la recherche de celle-ci qu'il faut se borner.

On pense assez généralement aujourd'hui, que toutes les particules de la matière sont douées d'une certaine propriété, par laquelle elles s'attirent mutuellement, s'attachent les unes aux autres lorsqu'elles sont à une proximité suffisante, et demeurent ainsi unies entre elles tant qu'une force supérieure ne vient point détruire cette union. On prouve l'existence de cette faculté par plusieurs observations et diverses expériences. La forme sphérique des plus petites masses des liquides, la réunion de deux gouttes d'eau en une seule, la formation des crystaux, supposent l'existence d'une pareille force. L'adhésion mutuelle de deux plans de glace ou de métal, de deux marbres, de deux balles de plomb, et en général de deux surfaces semblables suffisamment polies, adhésion qui ne peut s'expliquer ni par la pression de l'air qui n'est pas suffisante, ni par celle d'aucun fluide plus subtil qui devrait être la même sur des surfaces égales, s'explique parfaitement dans l'hypothèse d'une force d'attraction appartenant à chaque particule de matière. Cette force se manifeste encore d'une façon très-sensible et extrêmement remarquable dans la manière dont l'eau et le mercure se conduisent à l'égard du verre. On sait que

si l'on plonge dans l'eau un de ces tuyaux de verre, que l'on nomme *capillaires* à cause de la petitesse de leur diamètre, ce liquide monte dans son intérieur, et s'élève au-dessus du niveau environnant, d'autant plus que le tuyau est plus menu. L'effet avec le mercure est entièrement opposé; c'est-à-dire, que ce dernier liquide, dans un tuyau capillaire, reste au-dessous de son niveau, et se tient d'autant plus bas que le diamètre du tuyau est plus petit.

Ce double fait qui déroge également aux lois de l'hydrostatique, a fort occupé les physiciens. Après avoir pris bien de la peine pour en trouver une explication mécanique, ils se sont vus forcés de renoncer à toutes les hypothèses qu'ils avaient imaginées pour cela, et ils ont fini par admettre le seul système qui puisse rendre raison des phénomènes opposés que présentent le mercure et l'eau, celui qui admet une certaine force d'attraction entre les particules de la matière. L'expérience ayant appris que le verre adhérait à l'eau plus qu'elle n'adhère à elle-même, on sent pour quelle raison l'eau monte au-dessus de son niveau dans un tube de verre d'un petit diamètre. Son élévation est produite ici par la différence de deux attractions, et elle s'arrête lorsque le poids de l'eau élevée fait équilibre à l'excès de l'attraction du verre sur l'attraction de l'eau. Le mercure, au contraire, qui adhère à lui-même plus fortement qu'il n'adhère au verre, se tient au-dessous de son niveau, et la quantité de son abaissement est égale à la différence des deux attractions qui agissent sur lui. Ainsi deux effets contraires sont dus néanmoins à une même cause.

Le système d'explication qu'on vient d'exposer som-

mairement, se trouve confirmé par la forme qu'affectent l'eau et le mercure lorsqu'ils sont en contact avec le verre. L'eau s'élève toujours contre le verre ; et lorsqu'elle est contenue dans un vase de cette matière, sa surface s'abaisse de la circonférence vers le centre, et prend une figure concave. Au contraire, le mercure dans le même cas est plus élevé au milieu que vers les bords, et sa surface est convexe : toujours il s'abaisse contre le verre, et semble le fuir. C'est en partant de ces deux faits, et en admettant le principe de l'attraction moléculaire, que le comte La Place a donné une explication rigoureuse et complète du phénomène dont il est ici question. Au reste, après une longue ébullition, le mercure peut prendre dans le verre une surface plane ou même concave, et alors il s'élève au-dessus du niveau ; comme l'eau peut aussi rester au-dessous de son niveau dans un tuyau de verre dont l'intérieur est enduit de quelque matière grasse : mais ces faits ne sont nullement contraires au système établi par cet illustre savant.

Mais s'il existe dans la nature matérielle une force d'attraction qui sollicite les particules semblables à s'unir entre elles, et qui peut même produire une adhésion assez forte entre celles qui sont dissemblables, lorsque des molécules de la même nature et de la même forme viennent à se réunir pour former un corps d'un volume sensible, cette union n'est pas tellement exacte qu'il n'y ait entre ces molécules un très-grand nombre d'intervalles plus ou moins grands, que l'on appelle *pores*. La figure particulière des molécules intégrantes, et les circonstances qui accompagnent leur réunion, sont cause qu'il y a toujours dans le volume d'un corps quel-

conque une certaine portion de l'espace visible qu'il occupe, qui est vide, ou du moins qui n'est pas remplie par la matière même du corps. On établit donc en physique que tous les corps sont *poreux*.

On prouve la vérité de cette proposition, par l'observation et par l'expérience. Il est des corps qui peuvent être réduits en lames assez minces pour laisser apercevoir à l'aide d'une loupe ou d'un microscope, les nombreux interstices qui séparent leurs molécules. Pour d'autres corps, on s'assure de l'existence de leurs pores, en obligeant quelque fluide de se faire jour au travers de ces pores : ainsi le mercure peut passer au travers de la peau de buffle, l'eau au travers du chêne, l'air au travers de la coque de l'œuf. On démontre la porosité des liquides, en mêlant ensemble parties égales d'eau et de bon esprit de vin. On remarque que le mélange occupe moins d'espace que les deux liqueurs séparées, ce qui prouve d'abord qu'elles se sont pénétrées mutuellement. Mais on observe en même temps, qu'il se dégage une grande quantité de petites bulles d'air. Or cet air devait, comme il est évident, être logé dans les pores de l'un ou de l'autre liquide, et probablement dans tous les deux. Enfin, la seule différence de pesanteur des corps sous un même volume, suffit pour prouver qu'ils sont tous plus ou moins poreux.

De même qu'on ne peut savoir le nombre des molécules intégrantes qui composent un corps donné, on ne peut pas non plus déterminer le nombre ni la grandeur des pores de ce corps. Il n'est pas même possible d'assigner le rapport qu'il y a entre la somme des pores ou espaces vides, et la somme des parties solides ou espaces pleins. Pour pouvoir résoudre ce dernier pro-

blème, il faudrait d'abord trouver un corps qui fût entièrement solide, et n'eût point de pores. Or nous n'en connaissons point qui soient dans ce cas. Les corps les plus denses, l'or et le platine, sont criblés d'une infinité de pores. Tout ce que l'on peut donc savoir à ce sujet, c'est qu'un corps contient plus de particules matérielles, et par conséquent qu'il a moins de vide qu'un autre corps, lorsque sous même volume il est plus pesant que celui-ci.

La force de cohésion en assemblant des molécules de la même espèce, donne naissance à des *agrégés* qui diffèrent dans leurs propriétés mécaniques. Ainsi l'on distingue dans les corps la mollesse, ou la dureté ; la ductilité, ou la propriété contraire qu'on peut appeler *inextensibilité ;* la solidité, ou la fluidité ; la compressibilité, et enfin l'élasticité. Nous allons examiner successivement ces diverses propriétés des corps.

On appelle *mous* les corps dont un effort médiocre peut changer la forme, ou séparer les parties. L'on dit qu'un corps est *dur*, lorsque sa forme ne peut être changée, ou ses parties séparées, qu'en employant une force considérable. Le plomb qui se laisse entamer par le couteau, est un corps mou ; l'acier trempé sur lequel la lime a peine à mordre, est un corps dur.

La mollesse et la dureté dépendent de la manière dont la force de cohésion a pu réunir les parties intégrantes des corps. Si au moment de la formation d'un corps solide, cette force a été contrariée, si les parties du corps se sont trouvées entremêlées de particules étrangères, si la figure de ces mêmes molécules n'a pas pu se prêter à une plus étroite union ; alors il n'a dû résulter de leur assemblage qu'un corps dont la cohé-

sion est faible, et tout prêt, pour ainsi dire, à céder aux puissances extérieures qui tendent à altérer sa figure et à désunir ses parties. Ce ne sera pas la même chose, si la force qui préside à la formation des corps a pu déployer librement toute son énergie, et si la figure des molécules s'est trouvée propre à un rapprochement plus parfait : dans ce cas le corps opposera de la résistance, et ses parties ne cèderont qu'avec peine aux efforts que l'on fera pour les séparer. Voyez comme l'argile détrempée est molle et peu consistante : on la pétrit avec la main, on lui fait prendre à volonté toute sorte de formes. Mais cette même argile, sitôt qu'elle a subi l'action du feu dans un four de potier, devient dure, inflexible, et peut même faire feu contre l'acier. Il est visible que la mollesse de l'argile avant que d'être cuite, est due à l'interposition des particules aqueuses ; et que la dureté qu'elle acquiert dans le four, vient de ce que ses molécules, après l'expulsion de l'eau par le feu, peuvent se rapprocher davantage entre elles, et s'unir d'une manière plus étroite.

Mais quand même on voudrait supposer le concours de toutes les circonstances les plus favorables à la cohésion, il ne faut pas croire qu'il pût jamais en résulter un corps d'une dureté parfaite et dont les parties fussent tout-à-fait inséparables. Il est évident que la force que nous considérons ici, est nécessairement limitée, et qu'elle pourra toujours être vaincue par une force contraire et supérieure. Ainsi il n'existe et ne peut exister de corps parfaitement dur : les corps les plus durs que nous connaissions, peuvent toujours ou être brisés par de violentes percussions, ou être usés peu-à-peu par la puissance d'un frottement rude, qui attaquant leurs

molécules une à une, pour ainsi dire, parvient facilement à les détacher de la masse, et à rompre ainsi leur agrégation.

La mollesse a aussi ses degrès comme la dureté : elle varie dans les différens corps, et même dans un même corps suivant les circonstances où il se trouve. La cire, par exemple, s'amollit de plus en plus à mesure qu'elle s'échauffe ; elle finit par devenir liquide, lorsqu'elle est pénétrée d'une quantité suffisante de chaleur : de façon que la *liquidité* peut être considérée comme le dernier degré de la mollesse. Mais dans ce cas le corps passe de la forme solide à la forme liquide, ce qui donne lieu à des considérations particulières qui ne sont pas de notre objet.

La *ductilité* est autre chose que la mollesse : dans les corps ductiles la force de cohésion n'est pas réduite à aussi peu de chose, et elle continue de maintenir sous un même volume les parties qui se quittent pour obéir à la force qui les entraîne. La ductilité suppose que les molécules d'un corps peuvent glisser les unes sur les autres, sans cesser d'appartenir à ce corps ; et par conséquent qu'elles tiennent assez fortement les unes aux autres, en même temps qu'elles ont une figure qui se prête à ce mouvement.

On a essayé de déterminer par expérience quelle était la *ténacité* de differentes espèces de corps. On a pris des fils ou des barreaux de métal d'une égale grosseur, et on les a chargés de poids toujours croissans, et qui les tiraient suivant leur longueur, jusqu'à ce qu'ils rompissent sous la charge : on a eu ainsi la mesure de leur force de cohésion sur une étendue égale à celle de la surface mise à découvert par la rup-

ture. L'on a donc trouvé, pour le dire en passant, qu'un barreau équarri de deux lignes de face, se rompait, si c'était du fer d'Allemagne, sous un effort de 1930 liv.; de 1156 liv., si c'était de l'argent; de 1054, pour le cuivre de Suède; de 578 liv. pour l'or; de 250 liv. pour l'étain d'Angleterre, et de 25 liv. seulement pour le plomb. (*)

La cohésion est donc très-considérable dans les métaux, et ce sont néanmoins les corps les plus ductiles de la nature. Il est même à remarquer que celui de tous où la cohésion est la plus faible, est aussi celui qui a le moins de ductilité : le plomb ne peut être tiré qu'en fils assez gros, et qui se rompent de suite, lorsqu'on veut les rendre plus menus. L'or, l'argent, le cuivre, le fer, où la ténacité est incomparablement plus grande, sont aussi infiniment plus ductiles. On peut tirer ces métaux en fils d'une très-grande finesse. Mais c'est l'or surtout qui possède cette propriété à un plus haut degré. Cependant ce n'est pas dans ce métal, comme l'indique le tableau ci-dessus, que la force de cohésion est la plus grande : mais ainsi qu'on l'a observé, outre une grande ténacité, il faut encore que la figure des molécules puisse se prêter au mouvement de *traction*; et c'est dans l'or que ces deux conditions réunies forment un *maximum*.

La *malléabilité* est une propriété qui diffère peu de

(*) Des expériences semblables faites sur différentes espèces de bois, ont appris que des baguettes quarrées ayant trois lignes et un quart sur chaque face, se rompaient sous une charge de 1250 liv. si c'était du bois de hêtre; de 1150 liv. si c'était du chêne; de 1000 liv. pour le bois de tilleul; de 600 liv. pour le sapin, et de 550 liv. seulement pour le bois de pin.

la ductilité. On dit qu'un corps est malléable, lorsqu'il s'étend sous le marteau, sans qu'il s'y fasse de gerçure, sans qu'il y ait aucune solution de continuité. Les corps malléables s'étendent aussi en lames plus ou moins minces, par le moyen du laminoir. L'or qui est le plus ductile des métaux, est aussi le plus malléable de tous : on connaît la finesse de ces feuilles légères qu'on emploie pour dorer le bois. L'argent, le cuivre, l'étain se réduisent aussi en feuilles très-minces. La malléabilité n'est pas néanmoins dans tous les métaux en raison de la ductilité. Ainsi le fer et l'acier sont très-ductiles, comme on le voit par les fines cordes de clavecin, tandis qu'ils sont peu malléables : on ne peut, soit par le marteau, soit par le laminoir, les amener qu'à un degré d'épaisseur encore assez grande, comme on le voit par les feuilles de tôle, qui sont du fer battu. Cela vient sans doute de ce que les parties intégrantes du fer, refoulées par l'action du marteau, prennent entre elles un arrangement forcé, qui ne leur permet plus de se quitter sans se séparer tout-à-fait : et lorsqu'on veut réduire le métal à une moindre épaisseur, il se gerce et se déchire, de façon qu'il cesse alors d'être malléable.

La faculté de pouvoir s'alonger et s'étendre en divers sens, trouve souvent un obstacle soit dans la figure des molécules intégrantes, soit dans la force même de cohésion. Aussi voit-on des corps qui n'ont aucune ductilité dans leur état naturel, devenir très-ductiles lorsqu'ils sont pénétrés par quelque matière étrangère, qui diminue l'adhérence de leurs parties, et facilite leur mouvement. Le verre dans son état ordinaire ne se prête à aucun changement de forme : l'effort qu'il

faudrait faire pour déplacer ses parties, les séparerait tout-à-fait, et le romprait. Mais cette même matière devient d'une ductilité admirable, lorsqu'elle est pénétrée par la chaleur, et qu'elle est toute rouge de feu. Le verre alors se prête à tout, prend toutes les formes que l'on veut, s'alonge en fils de la plus grande finesse, s'amincit en pellicules si légères, que le moindre souffle suffit pour les emporter. Mais sitôt qu'il est refroidi, sa forme est fixée, et l'on ne trouve plus en lui ni ductilité ni docilité. C'est donc la matière du feu, qui en pénétrant le verre et diminuant la cohésion de ses parties, leur donne la facilité de glisser les unes sur les autres, et de se déplacer en demeurant néanmoins toujours unies entre elles. Mais la force qui suffit alors pour en opérer le déplacement, est bien moindre que celle qu'il faut pour les séparer tout-à-fait, et rompre le verre, lorsqu'il est froid.

L'inextensibilité est la qualité opposée à la ductilité. Il y a bien des matières qui sont tout-à-fait non ductiles, et qu'on ne peut ni étendre par le marteau, ni alonger par les filières, et à qui l'on ne peut faire changer de forme, qu'en les usant avec la lime ou autrement. C'est que la figure des molécules intégrantes et leur agrégation s'opposent ici à tout déplacement: une molécule ne peut quitter celles à qui elle est unie, sans se séparer de la masse, ou parce qu'elle se trouve seule, et portant à faux, ou parce que celles à qui elle pourrait s'unir, sont déja adhérentes à d'autres, et ne peuvent se prêter à une nouvelle union. De plus toutes les molécules désunies forment alors comme autant de petits corps séparés, qui ne peuvent plus contracter d'adhérence entre eux, parce qu'ils ne se

trouvent plus dans les circonstances qui avaient favorisé leur première réunion.

L'inextensibilité se trouve en général dans les corps durs, et même jusqu'à un certain degré dans quelques corps mous. Des matières inextensibles, les unes ne se rompent que sous des efforts violens, d'autres sont extrêmement *fragiles ;* une force médiocre suffit pour les rompre et les mettre en pièces.

On appelle *solides* les corps dont les molécules intégrantes sont fixes les unes à l'égard des autres, et gardent toujours entre elles les mêmes rapports de distance et de situation. Un solide conserve constamment la même forme, occupe toujours un espace de la même grandeur et terminé de la même manière. S'il se meut, toutes les parties qui le composent se meuvent comme le tout, et avec la même vitesse.

On donne le nom de *fluides* aux corps dont les molécules sont si faiblement unies, qu'elles peuvent se déplacer librement, descendre au fond, monter à la surface, s'arranger enfin de la manière qui leur convient, et cependant toujours de façon que cette surface supérieure soit *parallèle à l'horizon*. La forme des fluides est variable, et dépend de celle des vases qui les contiennent : c'est un *cylindre* dans un vaisseau cylindrique, un *prisme* dans un vase prismatique, etc ; enfin la grande mobilité de leurs molécules est cause qu'ils se moulent toujours parfaitement sur les parois qui les renferment.

Les parties des solides n'ont pas besoin d'être soutenues chacune séparément. Dans quelque situation que soit le corps, elles restent adhérentes entre elles, la force qui les unit suffisant pour s'opposer efficacement à leur séparation : on les soutient toutes quand on en

soutient une seule. Il n'en est pas de même des fluides: il faut des vases pour les contenir ; il faut des parois pour en soutenir les parties ; et si l'on perce un trou dans ces parois, les molécules qui répondent à l'ouverture, cessant d'être soutenues, commencent à s'échapper par là, suivies de toutes celles qui sont au-dessus d'elles.

Tout corps solide peut passer à l'état de fluidité, et dans ce passage la cohésion des parties est ou totalement détruite, ou du moins affaiblie au point qu'on peut la supposer nulle. Deux agens principaux peuvent opérer ce changement dans les corps, l'eau et le feu. Les substances qui se dissolvent dans l'eau participent à la fluidité de ce liquide, lorsqu'elles sont dans l'état de dissolution. Le feu lorsqu'il pénètre un corps en assez grande quantité, détruit l'agrégation de ses parties, et leur communique la mobilité qui constitue le corps à l'état de fluide. Cet agent puissant est capable de changer le corps le plus dur, le plus solide, dans lequel la cohésion est la plus forte, en un corps mou, facile à diviser, et dans lequel l'adhésion des parties est à peu près nulle. Il va même plus loin : il peut changer le corps qu'il a rendu liquide, en un fluide semblable à l'air, invisible comme lui, et dont les parties paraissent se repousser mutuellement.

De même que l'adhésion des molécules d'un corps peut diminuer jusqu'au point qu'elles deviennent comme indépendantes, de même cette adhésion qui est presque nulle dans un fluide, peut prendre une énergie capable de fixer la mobilité des parties, et de les enchaîner entre elles sous une forme solide. Tous les corps qui avaient été dissous dans l'eau ou dans

quelque autre liquide, reviennent à leur état de solides par l'évaporation de la liqueur qui les tenait en dissolution. Tous ceux que l'action du feu avait liquéfiés, ou vaporisés, reparaissent sous leur première forme, lorsque la chaleur qui tenait leurs parties écartées, vient à se dissiper. Ainsi un même corps peut se montrer à nous sous des formes bien différentes, suivant les circonstances où il se trouve.

Il existe donc dans la nature deux forces principales et opposées l'une à l'autre, la force d'attraction, qui tend à rapprocher toutes les parties de la matière, et qui réside dans chaque particule matérielle, et la force de répulsion, qui travaille sans cesse à écarter ces mêmes parties, et qui paraît résider dans l'élément du feu. Les corps solides sont ceux où la première de ces deux forces l'emporte sur la dernière; dans les liquides, les deux forces sont à peu près en équilibre; et enfin dans les fluides *aériformes*, la répulsion est supérieure à l'attraction. Ces deux forces se combattent donc, se balancent, se surpassent mutuellement, et c'est de cette lutte perpétuelle que naît l'ordre général.

Tous les corps étant remplis d'une infinité de pores, il suit qu'ils sont tous *compressibles*, c'est-à-dire, que leurs parties pourront se rapprocher, et que leur volume pourra diminuer. Cet effet peut être produit de deux manières, ou par l'accroissement de la force d'attraction, ou par l'application d'une force extérieure. Toutes les fois qu'un corps se refroidit, la cause qui tend à écarter ses molécules, s'affaiblit, celle qui tend à les rapprocher, s'accroît: d'où suit une diminution dans le volume du corps. Tous les corps sont compressibles de cette manière, et l'expérience ne laisse aucun

douté là-dessus. Pareillement, en appliquant extérieurement à un corps une force suffisante, on conçoit que ses parties pourront être obligées de se resserrer dans un moindre espace, et que le volume du corps éprouvera encore une diminution. Mais doit-on admettre que tous les corps sont compressibles de cette seconde manière? Est-il toujours possible d'effectuer actuellement cette compression ?

D'abord tous les corps mous peuvent évidemment être réduits par ce moyen à un moindre volume. En second lieu, un grand nombre de corps durs sont dans le même cas. Les métaux, par exemple, se compriment sous les coups de marteau : le métal *écroui* est plus pesant spécifiquement que celui qui ne l'a pas été, preuve que ses parties se sont rapprochées. Mais sans doute que cette compressibilité a des bornes, et que passé un certain point, tout rapprochement ultérieur des particules matérielles devient impossible. Concevons un corps tout composé de molécules sphériques. Dès que ces molécules seront en contact entre elles, quoiqu'elles laissent encore un très-grand nombre de vides, il est visible néanmoins que le volume de ce corps sera alors irréductible, et qu'il résistera victorieusement à toute compression. Car il ne pourrait céder qu'autant que ses molécules changeraient de forme ; et il est à présumer qu'aucune force extérieure n'est capable de produire cet effet. Ainsi il y aura des corps *incompressibles*, dans ce sens que leur volume ne saurait être réduit par l'emploi d'une pareille force. Néanmoins cette force pourra déplacer un peu les molécules du corps, et altérer ainsi sa figure totale : et cela s'appellera encore compression, si l'on veut. Mais

il ne faudra point attacher à cette expression l'idée d'une diminution de volume, qui n'a point lieu dans ce cas.

On pourrait objecter ici, que tous les corps, dans quelque état qu'ils soient, diminuant de volume par le réfroidissement, il suit que leurs molécules ne sont jamais dans cet état de rapprochement parfait que l'on vient de supposer; et par conséquent on ne voit pas pourquoi l'action d'une force mécanique ne produirait pas sur leur volume le même effet que produit une diminution de chaleur. Mais l'expérience nous ayant appris qu'il y a des corps dont le volume ne diminue point par la compression, on peut pour répondre à cette objection, supposer que les pores de ces corps étant occupés par la matière du feu, ce sont les particules de ce fluide emprisonnées entre les molécules du corps qui leur servent d'appui, et qui leur donnent ainsi le moyen de résister à un plus grand rapprochement.

Tous les corps solides, quelle que soit leur dureté, sont compressibles au moins dans ce sens que leur figure est altérée lorsqu'ils sont soumis à l'action de quelque puissance extérieure. Qu'on prenne un corps dur, sphérique, un de ces corps qui paraissent le moins propres à se laisser comprimer, une bille d'ivoire ou d'acier; qu'on laisse tomber cette bille de quelque hauteur sur une tablette de marbre poli, que l'on aura un peu ternie par la respiration ou autrement; et après le choc, on remarquera sur la tablette une tache circulaire qui pourra avoir une ligne plus ou moins de diamètre, suivant la force du choc. Or on sait qu'un corps sphérique ne peut toucher une surface plane que par un point. La bille s'est donc aplatie, ou la tablette s'est enfoncée sous le coup, ou enfin ces deux choses ont eu

lieu à la fois. Ces conséquences sont incontestables : et l'expérience prouve sans réplique, que la forme de la bille, pour nous borner à ce seul corps, a été altérée par la compression ; mais l'on ne peut savoir si son volume a été momentanément diminué. Car la bille en s'aplatissant dans un endroit, a pu s'étendre, et s'est effectivement étendue dans un autre, de façon qu'il a pu y avoir compensation.

La compression produit donc toujours quelque effet sensible sur les corps solides. En est-il de même pour les substances liquides ? une expérience fameuse faite autrefois par les académiciens de Florence, avait prouvé que l'eau est incompressible. On a voulu depuis élever quelques doutes sur ce résultat : on a cru reconnaître dans l'eau quelques faibles signes de compressibilité. Mais si ce liquide peut se comprimer, c'est de si peu de chose, qu'on doit en physique, et surtout en mécanique n'y avoir aucun égard. Les liqueurs paraissent en général être dans le cas de ce corps tout composé de molécules sphériques, dont il a été question tout à l'heure. Elles ne sauraient donc être réduites mécaniquement à un moindre volume, et sont capables d'opposer une résistance pareille à celle des corps les plus durs.

On appelle *élastiques*, les corps qui ayant changé de forme, ou diminué de volume par la compression, reviennent à leur premier état lorsque la force comprimante a cessé d'agir. L'air et les fluides aériformes possèdent cette propriété à un très-haut degré : mais nous n'en dirons rien ici, et nous nous contenterons de considérer l'élasticité dans les corps solides.

Reprenons pour cela la bille d'ivoire et la tablette de

marbre. La tache observée sur cette tablette nous a prouvé que la bille s'était aplatie. Cependant en examinant ce corps après le choc, on trouve qu'il est tout aussi rond qu'auparavant. Il est donc clair qu'il s'est rétabli ; et c'est ce retour à sa première forme, qui est l'effet de l'élasticité, et que nous avons à examiner ici. Commençons donc par analyser exactement ce qui se passe dans la bille au moment où elle choque le marbre.

Dans ce moment-là quelques parties, celles qui les premieres ont frappé l'obstacle, ont été refoulées vers le centre. Mais celles qui leur sont diamétralement opposées, s'en sont rapprochées aussi : tandis que les parties de la surface qui tiennent le milieu entre celles-là, ont au contraire été forcées de s'en éloigner. La bille a donc pris par l'effet du choc une forme *ovale*, à peu près semblable à celle d'une orange posée sur un plan. Telle est l'altération produite dans la bille au premier instant, altération dont il ne reste aucun vestige après le rétablissement. Mais ce qui est fort à remarquer ici, c'est que le retour du corps à sa première forme ne s'est pas fait subitement, et que la figure de la bille a éprouvé un grand nombre de changemens alternatifs avant d'être fixée. Au premier instant, son diamètre vertical s'est accourci, et les diamètres perpendiculaires à celui-là se sont allongés. Dans l'instant suivant, le premier diamètre s'est allongé, et les autres se sont accourcis, tout comme si la bille avait éprouvé une compression dans le sens horizontal. Au troisième instant la figure de la bille est revenue à peu près comme elle était au moment du choc ; je dis à peu près parce que l'aplatissement a été un peu moindre. La même chose s'est répétée dans les instans suivans ; mais les

changemens de figure sont toujonrs allés en diminuant ; et enfin la bille a recouvré sa forme sphérique.

Les changemens alternatifs dont on vient de parler, ne sont pas sensibles à la vue dans un corps d'un aussi petit volume que notre bille d'ivoire : ils se font avec trop de vîtesse, et ont trop peu d'étendue. Mais ils s'aperçoivent très-bien dans un corps d'un grand volume, sur tout si l'on place tout auprès un point fixe, qui puisse servir de terme de comparaison. On les aperçoit dans une longue corde de boyau tendue entre deux points fixes, qu'on pince avec les doigts, ou sur laquelle on passe un archet. La corde élevée ou abaissée par cette action est forcée de s'allonger ; et lorsqu'on l'abandonne à elle-même, elle revient, et passe au-delà de sa première position, comme si elle était pincée dans le sens contraire, et ainsi alternativement. On les voit encore mieux dans un ressort de montre, que l'on bande, et qu'on laisse ensuite aller ; dans une lame d'acier fixée par une de ses extrémités, que l'on courbe en forme d'arc par l'autre bout, et qu'on abandonne tout-à-coup à elle-même. Dans tous ces cas, on voit que ces corps élastiques ne se fixent dans leur état naturel qu'après un grand nombre *d'oscillations*, qui les portent alternativement au-delà et en deça du point où ils doivent s'arrêter.

Les oscillations ou vibrations d'un corps élastique sont plus ou moins promptes, selon que le corps que l'on considère a plus ou moins de grosseur, et plus ou moins de longueur. Ainsi une corde plus longue ou plus grosse vibre plus lentement qu'une corde ou plus courte ou plus menue. Mais quoique l'étendue des vibrations d'un même corps élastique aille en diminuant

de plus en plus à compter de l'origine du mouvement, néanmoins toutes ces vibrations sont à peu près d'une égale durée.

Si l'on considère la vertu élastique en elle-même, on ne peut pas s'empêcher de la regarder comme une puissance active et très-énergique, qui réside dans certains corps, et qui est destinée à les maintenir dans un certain état, et à les y ramener lorsque quelque force extérieure les en a tirés. Comment en effet concevoir autrement ce retour d'un corps à son état premier, et surtout cette impétuosité avec laquelle il tend à y revenir, impétuosité qui le porte au-delà du but, qui produit sur ce corps un effet semblable à celui que la compression y avait produit, et qui rendrait ses oscillations interminables, sans le frottement que les molécules éprouvent les unes contre les autres, sans la résistance que l'air oppose à tout mouvement? Mais faudra-t-il créer une force nouvelle pour rendre raison de ces faits? non, sans doute : il me semble que la seule force de cohésion doit suffire pour les expliquer.

Je suppose que les particules des corps élastiques se touchent entre elles aussi exactement, ou qu'elles sont rapprochées autant qu'elles peuvent l'être dans les circonstances où elles se trouvent. Lors donc que l'on courbe un corps à ressort, une lame d'acier, par exemple, l'on force les molécules qui sont dans la partie convexe, à s'écarter un peu les unes des autres, sans se quitter pourtant tout-à-fait, et sans sortir de leur sphère d'activité mutuelle; car alors il y aurait rupture, ou solution de continuité : mais seulement en se détachant dans quelques points, et restant toujours unies dans les autres. De même les molécules qui sont

dans la partie concave, et qui seraient forcées de se rapprocher, si ce rapprochement était possible, ne peuvent que tourner sur quelqu'un de leurs points de contact, et être ainsi un peu dérangées de leur position naturelle. Un ressort bandé est donc un corps dont toutes les molécules par l'action d'une force étrangère éprouvent un certain déplacement, et dans lequel la force d'attraction qui est leur lien commun, se trouve contrariée par cette même action. Sitôt que celle-ci vient à cesser, le principe de l'adhésion manifeste toute son activité : il rapproche les parties qui avaient été écartées ; il tend à rétablir l'ordre premier, et à remettre en contact les points qui se touchaient. Mais comme la compression a cessé tout-à-coup, la *réaction* intérieure qui lui est égale, se fait avec trop de vivacité, pour que chaque particule s'arrête à sa place où elle était d'abord revenue. De plus comme l'attraction est une force qui va en croissant à mesure que la distance diminue, les molécules du corps reviennent à leur place avec une vîtesse *accélérée*, et une si grande vivacité, qu'elles tournent une seconde fois sur elles-mêmes, et s'écartent en de nouveaux points ; de manière que le ressort se courbe dans le sens contraire, et que la force qui travaille à rétablir le corps, y produit un dérangement de parties semblable à celui que la *tension* y avait fait naître. Celui-ci est suivi d'un troisième, d'un quatrième, et ainsi de suite ; de façon que pendant tout le temps que durent les vibrations du corps à ressort, les molécules ont un balancement alternatif assez analogue au roulis d'un vase qui flotte sur l'eau. Mais enfin pour produire ces vibrations et rétablir finalement le corps dans son premier état, il ne faut comme on voit, que la seule force qui est la cause de la cohésion.

L'accélération qui a lieu dans le rétablissement d'un corps élastique, jusqu'au moment où il rencontre sa forme première, explique parfaitement pourquoi les parties remises en contact comme elles l'étaient d'abord, ne peuvent pas néanmoins s'arrêter encore dans cette position, où elles se fixeront à la fin de leur mouvement alternatif. Il est visible en effet qu'une vîtesse qui est allée en croissant jusqu'à un certain point, ne peut pas s'anéantir subitement et sans cause, au moment même où elle est la plus grande. Pour que la vîtesse d'un corps en mouvement soit détruite, il faut que cette vîtesse s'épuise peu-à-peu contre un obstacle. Or l'obstacle est ici l'effort qu'il faut faire pour donner au ressort une courbure opposée à celle que la compression lui avait fait prendre. L'accélération avec laquelle se fait le rétablissement, est donc la cause que le ressort se trouve alternativement tendu en sens contraires ; et si ce n'était certaines résistances dont on a déja fait mention, les vibrations d'un ressort une fois mis en jeu, ne devraient jamais finir.

Au reste la propriété que nous venons de considérer, est dans bien des cas une force naturelle d'une grande importance, et qui peut influer beaucoup sur les résultats de la mécanique, ainsi que nous aurons soin de le faire observer lorsqu'il faudra.

MÉCANIQUE PHYSIQUE.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE ET [illegible] DES LOIS DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT.

La Mécanique se divise naturellement en deux sections [illegible] : la première [illegible] traite des lois de l'équilibre, et la seconde de celles du mouvement. La science de l'équilibre est connue sous le nom de Statique, et celle du mouvement sous celui de Dynamique. Nous commencerons par cette dernière, et nous exposerons les lois du mouvement dans tous les cas, en considérant d'abord les corps comme des points matériels et physiques, et en ayant ensuite égard à leurs masses. Nous passerons après cela au cas particulier où les forces qui agissent sur les corps, se balancent et se détruisent mutuellement, ce qui constitue l'équilibre.

L'accélération qui a lieu dans le rétablissement d'un corps élastique, jusqu'au moment où il rencontre sa forme première, explique parfaitement pourquoi les parties remises en contact comme elles l'étaient d'abord, ne peuvent pas néanmoins s'arrêter encore dans cette position, où elles se fixeront à la fin de leur mouvement alternatif. Il est visible en effet qu'une vîtesse qui est allée en croissant jusqu'à un certain point, ne peut pas s'anéantir subitement et sans cause, au moment même où elle est la plus grande. Pour que la vîtesse d'un corps en mouvement soit détruite, il faut que cette vîtesse s'épuise peu-à-peu contre un obstacle. Or l'obstacle est ici l'effort qu'il faut faire pour donner au ressort une courbure opposée à celle que la compression lui avait fait prendre. L'accélération avec laquelle se fait le rétablissement, est donc la cause que le ressort se trouve alternativement tendu en sens contraires; et si ce n'était certaines résistances dont on a déja fait mention, les vibrations d'un ressort une fois mis en jeu, ne devraient jamais finir.

Au reste la propriété que nous venons de considérer, est dans bien des cas une force naturelle d'une grande importance, et qui peut influer beaucoup sur les résultats de la mécanique, ainsi que nous aurons soin de le faire observer lorsqu'il faudra.

MÉCANIQUE PHYSIQUE,

OU

TRAITÉ EXPÉRIMENTAL ET RAISONNÉ DES LOIS DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT.

LA Mécanique se divise naturellement en deux sections parce qu'elle a un double objet. Elle traite des lois de l'*équilibre*, et de celles du *mouvement*. La science de l'équilibre est connue sous le nom de *Statique*, et celle du mouvement sous celui de *Dynamique*. Nous commencerons par cette dernière, et nous exposerons les lois du mouvement dans tous les cas, en considérant d'abord les corps comme des points matériels et physiques, et en ayant ensuite égard à leurs masses. Nous passerons après cela au cas particulier où les forces qui agissent sur les corps, se balancent et se détruisent mutuellement, ce qui constitue l'équilibre.

SECTION PREMIÈRE.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA MOBILITÉ ET DE L'INERTIE.

LA *mobilité* est la faculté de pouvoir être mis en mouvement. Cette propriété, comme il est évident, appartient à tous les corps. On conçoit en effet qu'un corps, quels que soient son volume et sa masse, peut toujours être *déplacé* par une force suffisante, et transporté dans l'*espace* d'un lieu en un autre.

L'*espace* est cette étendue immense, illimitée, dans laquelle existent tous les corps dont l'ensemble compose cet Univers. Chaque corps occupe une portion de l'espace plus ou moins grande, et c'est ce qu'on appelle le *lieu* du corps.

Tant qu'un corps est dans le même lieu, on dit qu'il est en *repos*. Lorsqu'il occupe successivement des lieux différens, on dit qu'il est en *mouvement*. L'on dit encore qu'un corps est en mouvement, lorsqu'il tourne sur lui-même sans changer de lieu : mais ce sont alors les parties du corps qui se meuvent, et non pas le corps lui-même.

Le repos *absolu*, tel qu'on vient de le définir, ne paraît pas exister dans notre monde : du moins est-il reconnu que la terre et les planètes se meuvent dans le ciel ; et il est fort à présumer que le soleil, qui

tourne certainement sur lui-même, a de plus quelque mouvement de *translation* dans l'espace. Il ne peut donc y avoir pour nous qu'un repos *relatif* : c'est celui qui a lieu, lorsque plusieurs corps gardent entre eux les mêmes rapports de distance et de situation. Ainsi les objets fixés à la terre sont dans cette espèce de repos, quelle que soit la vitesse du mouvement qui entraîne notre globe dans l'espace.

Le repos ne suppose l'existence d'aucune force : cependant il résulte souvent de l'action simultanée de forces *égales* et *opposées*. Dans ce dernier cas on l'appelle *équilibre*, et il dégénère en mouvement, pour peu que l'égalité des forces, ou leur opposition cesse d'être parfaite.

On connaît qu'un corps est en mouvement, lorsqu'il se fait quelque changement dans sa situation ou sa distance à l'égard des corps environnans. Ainsi en voyant passer un homme à cheval, nous le jugeons en mouvement, parce que sa position et sa distance à notre égard changent à chaque instant.

Il peut arriver que le mouvement soit assez lent, ou l'objet assez éloigné, pour que nous ne puissions pas sur-le-champ reconnaître s'il se meut, ou s'il est en repos. Mais nous pourrons toujours trouver la vérité à cet égard, en comparant sa situation dans un moment avec sa situation dans un autre moment suffisamment éloigné du premier. Ainsi l'aiguille des heures d'une montre semble immobile au premier coup d'œil : mais au bout de quelques minutes, on a reconnu qu'elle se meut réellement. C'est aussi de la même manière que nous reconnaissons le mouvement des astres.

Lorsque la situation d'un objet change à l'égard de

ceux à qui on le compare, on ne peut pas toujours en conclure que ce soit cet objet qui est en mouvement : il peut se faire qu'il soit en repos „et que le mouvement se fasse dans l'ensemble des objets environnans. Ainsi la lune comparée aux nuages semble quelquefois se déplacer rapidement dans le ciel, tandis que ce sont les nuages qui entraînés par les vents, passent comme un courant entre cet astre et nous.

Les changemens respectifs de situation indiquent donc du mouvement, mais sans faire connaître au juste quels sont les corps dans lesquels ce mouvement existe. En voyant tous les jours le soleil changer par rapport à nous, on peut assurer qu'il se fait un mouvement continuel et non interrompu. Mais est-ce le soleil qui tourne sans relâche autour du globe terrestre? ou bien est-ce notre globe, qui tournant sur lui-même, présente continuellement au soleil les différentes parties de sa surface ? L'un et l'autre peuvent être également, et les simples *apparences* ne suffiraient pas pour décider la question, si elle n'était pas d'ailleurs décidée par des considérations morales, et par des observations d'un autre genre.

Lorsque plusieurs corps sont entraînés dans le même sens, et avec la même vîtesse, on peut à volonté les considérer comme étant en repos, ou comme étant en mouvement. Ils sont en repos les uns à l'égard des autres : c'est le cas du repos relatif dont on a déjà parlé. Ils sont en mouvement à l'égard des corps qui sont hors de leur *système :* mais quelle que soit la rapidité de ce mouvement, comme on suppose qu'il ne peut altérer leur situation respective, ces corps s'ils viennent à éprouver l'action de quelque puissance étrangère, se comportent

entre eux tout comme s'ils avaient été dans le repos le plus parfait. Ainsi dans un navire qui vogue à pleines voiles, et dont nous supposons le mouvement *égal* et *uniforme*, tout se passe de la même manière que si le navire était à l'ancre ou dans le port.

Lorsqu'un corps est dans l'état de repos, comme il n'y a en lui aucune raison pour qu'il se mette en mouvement dans un sens plutôt que dans un autre, il restera constamment dans cet état de repos, tant que l'action d'une force extérieure ne viendra pas l'en tirer. Le mouvement est donc le résultat d'une puissance étrangère au corps qui se meut.

On donne le nom de *puissance* ou de *force* à tout ce qui est capable d'opérer un changement dans l'état mécanique d'un corps : et cette dénomination paraît venir de l'effort que nous sommes obligés de faire, lorsque nous voulons produire ce changement par nous-mêmes.

Comme un corps ne peut se donner du mouvement, pareillement un corps qui se meut, ne peut de lui-même s'arrêter, ni changer de route, ni accélérer, ou ralentir son mouvement; et toutes les variations qui peuvent survenir dans sa direction ou sa vîtesse, sont toujours produites par des causes qui lui sont étrangères.

Cette impuissance de changer son état actuel, qui caractérise la matière brute, s'appelle *inertie*. On la désigne quelquefois sous le nom de *force d'inertie*: mais cette qualification de force a paru inexacte, et propre à induire en erreur. Une force doit être capable de produire un effet; et l'inertie n'est capable de rien. Cependant on dit qu'un corps en repos *résiste* au mouvement, et qu'un corps en mouvement *résiste* au repos; c'est-à-dire, que pour tirer un corps de l'état

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT SIMPLE.

On appelle mouvement *simple*, celui qui résulte de l'action *d'une seule* force.

1. *Des Forces Motrices.*

On appelle *force motrice*, tout ce qui est capable de produire du mouvement dans les corps, comme la pesanteur, l'impulsion d'un fluide, l'action des corps animés, celle des corps en mouvement. Parmi ces forces, les unes n'agissent que pendant un *instant*, après quoi le corps qu'elles ont poussé, est abandonné à lui-même, ou plutôt à l'impulsion qu'il a reçue. Les autres au contraire agissent d'une manière *continue*, et le corps qu'elles entraînent, ne cesse point d'éprouver de leur part une action, qui *s'ajoute* à chaque instant aux actions précédentes. (1)

La nature des forces motrices ne nous étant pas connue *à priori*, nous ne pouvons les mesurer que par les *effets* qu'elles sont capables de produire, c'est-à-dire, par la grandeur de la *masse* qu'elles peuvent mouvoir,

(1) L'action des animaux, l'impulsion d'un fluide semblent être, et ne sont pas des forces *continues*, dans le sens que nous donnons à ce mot, parce que leurs actions successives ne s'ajoutent pas les unes aux autres, et qu'elles ne font qu'entretenir la vitesse communiquée au premier instant.

et la *vitesse* qu'elles peuvent lui communiquer. On dit donc qu'une force est *double* d'une autre, quand elle peut imprimer la même *vitesse* à une masse *double*, ou une vitesse *double* à la *même* masse. Les forces *instantanées* peuvent bien être comparées l'une à l'autre par ce moyen, de même que les forces *continues* aussi entre elles. Mais on ne saurait avoir le rapport absolu des unes aux autres ; parce que l'effet des premières est toujours *fini*, tandis que celui des dernières est naturellement *illimité*. Cependant comme celles-ci agissant pendant un temps donné, ne peuvent produire au bout de ce temps qu'un effet pareillement *fini*, il est toujours facile de trouver une force de la première classe capable du même effet, et par conséquent d'établir entre elles une comparaison.

2. *Lois du Mouvement simple.*

Lorsqu'un corps a été tiré de l'état de repos par l'action *instantanée* d'une force quelconque, il doit se mouvoir *constamment dans le même sens, et avec la même vitesse.* C'est là ce qu'on appelle la *première loi* du mouvement simple. En effet, le corps, comme on a vu, ne peut de lui-même ni retarder, ni accélérer sa vitesse, ni changer la direction qu'il a reçue. Le mouvement produit par une cause telle qu'on vient de dire, est donc de sa nature *uniforme*, *rectiligne*, et *perpétuel.* Il est également *rectiligne*, lorsqu'il est le résultat de l'action d'une force *continue* : car il est nécessaire que celle-ci ait une direction constante et qu'elle tende vers un certain point qui en est comme l'origine. Mais dans ce cas le mouvement ne saurait être uniforme, puisque la force qui l'a produit continue d'agir.

Tout changement qui survient dans la vitesse, ou dans la direction d'un corps en mouvement, résulte de l'action d'une nouvelle force, ou de la résistance d'un obstacle, et lui est proportionnel. C'est la *seconde loi* du mouvement. Si nous voyons tous les mouvemens imprimés ici-bas aux corps terrestres, quelle que soit d'abord leur vitesse, s'affaiblir promptement et s'éteindre bientôt tout-à-fait, c'est que ces corps rencontrent à chaque instant des obstacles qui leur dérobent de leur vitesse, et les ramènent ainsi à l'état de repos. Nous ferons bientôt connaître ces divers obstacles.

3. *Mouvement uniforme.*

On considère trois choses dans le mouvement d'un corps : sa *direction*, sa *vitesse*, et sa *quantité*.

La direction du mouvement est la ligne droite que suit le mobile. Elle se rapporte ordinairement à un plan pris à volonté : ainsi l'on dit que le corps se meut ou *parallèlement*, ou *perpendiculairement*, ou *obliquement* à ce plan, selon que cette ligne est parallèle, ou perpendiculaire, ou oblique au plan.

Par la vitesse du mouvement on entend la grandeur de l'espace que le mobile parcourt, ou tend à parcourir dans *l'unité* de temps, unité qu'on peut d'ailleurs choisir d'une manière arbitraire. Si le mouvement du corps est tel, qu'il parcoure des espaces *égaux* dans des temps *égaux*, la vitesse est alors *uniforme*, et pour en avoir l'expression il suffit de *diviser la longueur de l'espace parcouru par le nombre des unités de temps employées à le parcourir.* (1)

La vitesse, l'espace, le temps étant des choses de

---

(1) Cette règle s'exprime d'une manière abrégée par la for-

nature différente, ne peuvent pas en rigueur être comparées entre elles. Mais il faut observer que ce n'est pas le temps que l'on compare avec l'espace ; mais le nombre des unités du temps avec le nombre des unités de l'espace, pour en obtenir un nombre *abstrait*, qui sert à représenter la vitesse.

Il est facile de voir, d'après la règle qu'on vient d'établir, que dans le mouvement uniforme, la vitesse *augmente*, soit lorsque l'espace *augmente*, soit lorsque le temps *diminue*.

Ce qui constitue l'uniformité de la vitesse, c'est l'*égalité* des espaces parcourus dans des temps *égaux*. Mais comment juger si les temps sont égaux ? Nous n'avons d'autre moyen pour cela que l'uniformité de la vitesse ; de sorte que nous tournons nécessairement ici dans un cercle vicieux. Cependant il nous suffit de concevoir l'indépendance de ces deux choses, pour que la définition de la vitesse uniforme soit exacte, et qu'elle porte dans l'esprit une conception juste et claire. Si néanmoins on voulait trouver quelque exemple de ces intervalles de temps parfaitement égaux entre eux, on pourrait concevoir un certain nombre de corps sphériques tous égaux, tombans d'une *même* hauteur, et de manière que chacun d'eux commence à tomber à l'instant même où celui qui le précède est arrivé au terme de la chute. Il est évident que tout étant égal ici, la durée de la chute sera la même pour tous ces corps.

Lorsque la vitesse d'un corps en mouvement est

---

mule algébrique : $V = \frac{E}{T}$. Ce sont les lettres initiales des mots *vitesse*, *espace* et *temps*. C'est la formule du mouvement uniforme.

la même à tous les instans, on dit que le corps se meut d'un *mouvement uniforme*. Dans cette espèce de mouvement, il est toujours facile de trouver *l'espace* parcouru dans un *temps* donné, lorsqu'on connaît la *vitesse*. Il suffit évidemment de *répéter celle-ci autant de fois qu'il y a d'unités dans le temps*. (1) Ainsi un courrier qui fait *trois* lieues par heure, ferait *trente* lieues en *dix* heures de temps.

On aura de même le temps en *divisant l'espace par la vitesse*. Si l'on demande quel temps il faudrait à un courrier pour faire *cinquante* lieues, en supposant qu'il fît *deux lieues et demie* par heure : on diviserait *cinquante* qui est *l'espace*, par *deux et demi* qui est la *vitesse*, ou *cent* par *cinq*, et l'on trouverait tout de suite qu'il lui faudrait *vingt* heures : ce serait là le *temps* demandé. En général il est toujours facile de connaître l'espace, ou la vitesse, ou le temps, lorsque deux de ces trois choses sont connues.

On peut aussi, en se servant des mêmes règles, comparer ensemble les vitesses de deux mobiles qui se meuvent d'un mouvement uniforme. (2) Ainsi l'on trouvera d'abord que ces vitesses sont entre elles

---

(1) La formule $V = \frac{E}{T}$, qui fait connaître la vitesse, fournit les deux suivantes : $E = TV$, et $T = \frac{E}{V}$. La première sert à trouver l'espace, et l'autre à donner le temps.

(2) Les formules des vitesses uniformes pour deux différens mobiles étant $V = \frac{E}{T}$, et $V' = \frac{E'}{T'}$ on en conclut $V : V' :: \frac{E}{T} : \frac{E'}{T'}$. Lorsque $T = T'$, alors $V : V' :: E : E'$. Si $E = E'$, on a pour lors $V : V' :: T' : T$. Quand $V = V'$, il vient $\frac{E}{T} = \frac{E'}{T'}$, d'où, $E : E' :: T : T'$, c'est-à-dire, ce qui de soi est évident, que dans ce cas les espaces sont comme les temps.

directement comme les espaces parcourus, s'il y a égalité dans les temps, et *réciproquement* comme les temps, quand les espaces sont égaux. Ces deux rapports ont lieu à la fois lorsque les espaces et les temps sont différens entre eux. Que l'un des mobiles ait fait *cinquante* mètres en *douze* secondes, et l'autre *quarante* mètres en *quinze* secondes : La vitesse du premier était à la vitesse du second, *comme* 50 divisé par 12 *est à* 40 divisé par 15, ou *comme* 25 est à 16 : Ce qui veut dire, que lorsque le premier mobile faisait 25 mètres, le second n'en faisait que 16.

Quand les espaces parcourus sont égaux, les vitessses des deux mobiles sont en raison *inverse* ou *réciproque* des temps : ce qui signifie que celui-là marchait le plus vîte, à qui il a fallu le *moins* de temps, chose évidente par elle-même. Si donc deux mobiles ont fait le *même* chemin, l'un en 17 minutes, et l'autre en 51, il est clair que la vitesse du premier était *triple* de la vitesse du second, par la raison que son temps n'est que le *tiers* du temps de l'autre. Telle est la manière dont il faut entendre ces mots de *raison inverse* ou *raison réciproque.* (*)

4. *Mouvement varié.*

Lorsque les espaces que le mobile parcourt en des temps égaux, n'ont pas cette égalité que nous avons supposée jusqu'ici, on dit alors que le mobile se meut d'un mouvement *inégal* ou *varié*. Si les espaces vont en croissant ou en décroissant de la même manière à chaque instant, le mouvement est dit *uniformément accéléré ou retardé :* il est simplement accéléré ou

---

(*) Voyez à la fin la Note (*a*).

retardé, lorsque les accroissemens ou les diminutions de vitesse ne sont point soumis à cette loi d'uniformité.

L'accélération de la vitesse suppose toujours que la cause qui a produit le mouvement, réitère ses impulsions sur le mobile, et ajoute ainsi de nouveaux degrés à la vitesse déjà communiquée. Le ralentissement au contraire ne peut venir que d'une nouvelle force qui combat la première, ou d'un obstacle qui contrarie celle-ci et en diminue l'effet.

Lorsque le mouvement varie de quelque manière que ce soit, on mesure la *vitesse* du mobile dans un instant donné par la grandeur de l'espace que ce mobile pourrait parcourir dans l'unité de temps, si tout-à-coup la vitesse dont il est animé à cet instant devenait uniforme. Telle est l'idée qu'il faut attacher au mot *vitesse* dans le mouvemen varié.

5. *Mouvement uniformément varié.*

Cherchons les lois du mouvement *uniformément* accéléré ou retardé : car il est évident que le mouvement tout-à-fait inégal ne peut-être soumis à aucune loi.

Si l'on suppose donc que la vitesse d'un mobile croît à chaque instant de la *même* quantité, il sera facile d'avoir cette vitesse au bout d'un nombre donné d'instans, pourvu qu'on connaisse la vitesse initiale, et la quantité dont elle augmente à chaque instant. Il faut pour cela *multiplier l'accroissement instantané par le nombre des instans*, *et ajouter à ce produit la vitesse primitive.* Si celle-ci était nulle, il ne resterait que le produit indiqué pour exprimer la vitesse demandée. Ainsi un mobile qui part du repos, et dont la vitesse s'accroît de *quinze* pieds par seconde, jouit au

bout de *dix* secondes, d'une vitesse capable de lui faire parcourir uniformément 150 pieds par seconde. (1)

Quant à l'espace parcouru dans l'espèce de mouvement que nous considérons ici, j'observe que si dans le mouvement uniforme, où la vitesse est *constante*, cet espace augmente en même raison que le temps, il doit quand le mouvement est uniformément accéléré, augmenter à la fois en raison du temps et en raison de la vitesse. Mais celle-ci, comme on vient de voir, suit aussi la loi du temps, et augmente avec lui. Donc dans cette sorte de mouvement l'espace parcouru depuis le commencement suit la *double* loi du temps, ou la loi du *quarré* du temps ; c'est-à-dire que dans un temps *double* l'espace parcouru est *quadruple ;* qu'il est *neuf fois* plus grand quand le temps est *triple*, etc. Remarquez que les temps et les espaces doivent se compter à partir de l'origine du mouvement.

Telle est la loi qui établit le rapport entre les espaces parcourus dans des temps différens : on dit qu'*ils sont entre eux comme les quarrés des temps.* Mais comment trouver la grandeur absolue de l'espace parcouru depuis l'origine du mouvement pendant un temps donné ? Il faut observer pour répondre à cette question, que la vitesse est allée en croissant *uniformément* pendant toute la durée du mouvement, depuis le premier instant où elle était nulle, jusqu'à la fin du temps donné où elle nous est connue par la première loi. Or il est facile de voir que l'effet, ou l'espace parcouru par le

---

(1) En désignant par v la vitesse demandée, par u l'accroissement instantané, et par t le nombre des instans, on a la formule $v = ut$. S'il y avait une vitesse initiale V, la formule serait : $v = V + ut$.

mobile en vertu d'une vitesse ainsi croissante, est le même que si la vitesse eût été *uniforme* et égale à *la moitié* de celle acquise pendant le temps en question. *En prenant donc la moitié de cette dernière et la multipliant par le nombre des instans, on aura l'espace demandé.* Il est encore évident que si le mobile, au bout du temps donné, continuait à se mouvoir *uniformément* pendant un temps *égal* avec la vitesse qu'il a à ce moment, il parcourrait un espace *double* de celui qu'il a parcouru jusqu'alors. (1)

Si le mobile avant d'être saisi par la force *accélératrice*, avait déja dans le même sens une vitesse uniforme quelconque, il faudrait l'ajouter à celle que cette force lui a communiquée, et augmenter l'espace parcouru de tout celui que cette vitesse uniforme est capable de lui faire parcourir. Mais si celle-ci avait été imprimée au mobile dans un sens contraire à celui de la force *d'accélération*, alors l'effet de cette dernière force serait d'affaiblir continuellement et de plus en plus la force qui lui est opposée; et elle ne viendrait à bout de la détruire complètement qu'*au bout du temps* qui lui est nécessaire pour produire une vitesse égale. Le mobile à cet instant cesserait d'obéir à la vitesse uniforme

---

(1) La vitesse $v = ut$ ayant été acquise par degrés égaux et successifs pendant le temps t, est équivalente à une vitesse uniforme moitié moindre, ou égale à $\frac{1}{2} ut$; et l'espace e décrit pendant ce temps t avec cette vitesse est égal à $\frac{1}{2} ut \times t$. La formule des espaces dans le mouvement uniformément accéléré est donc $e = \frac{1}{2} ut^2$. On tire facilement de cette formule les diverses règles établies dans le texte.

dont il était d'abord animé, et il ne serait plus soumis qu'à la seule force accélératrice, qui l'entraînerait en sens contraire, comme s'il partait du repos, et qu'il commençât seulement à se mouvoir. Quant à l'espace qu'il aurait parcouru dans la première direction, on le trouvera facilement, en déterminant le *temps* pendant lequel il s'est mu dans cette direction, et calculant l'*espace* que la force accélératrice fait décrire pendant ce même temps. Ces deux espaces sont évidemment égaux. Nous verrons par la suite des applications importantes des principes qu'on vient d'établir sur le mouvement uniformément accéléré ou retardé.

6. *De la quantité de Mouvement.*

On appelle *quantité de mouvement* le produit de la *masse* d'un corps par la *vitesse* dont il est animé. Quand un corps solide est mu avec une vitesse quelconque, toutes les particules matérielles dont il est composé, jouissent de la même vitesse ; et par conséquent pour connaître la force qui l'anime, et l'effet dont il est capable, il faut nécessairement avoir égard au nombre de ces particules matérielles, et à la vitesse qui les entraîne toutes également. L'on aura donc la force d'un corps en mouvement, *en multipliant sa masse par sa vitesse.*

On conclut de là que la force augmente, ou diminue, en même raison que la masse lorsque la vitesse demeure la même, ou bien comme la vitesse lorsque la masse est constante, ou enfin comme l'une et l'autre à la fois lorsque ces deux choses varient en même temps. Cette force reste la même et n'éprouve aucun changement, lorsque la masse et la vitesse du mobile

changent toutes deux, mais en sens contraire, et comme on dit, *en raison inverse.* Il est facile d'après cela de comparer les forces de deux mobiles différens. (1)

Lorsque la force d'un corps en mouvement est employée pour obtenir un certain *effet*, il n'est pas toujours indifférent d'augmenter cette force en augmentant la masse du corps, ou en accélérant sa vitesse. Quand l'action doit se transmettre instantanément et avec rapidité, augmentez la vitesse du corps en mouvement : lorsqu'il faut au contraire que l'action s'étende et se propage au loin, donnez-lui plus de masse. Ainsi le boulet de canon fait simplement quelques trous dans un mur, que le bélier des anciens aurait ébranlé et renversé sur une grande étendue. La raison de cette différence vient de ce que le mouvement ne peut passer d'un corps dans un autre, que dans plusieurs instans successifs, dont le nombre dépend de la vitesse du mouvement, et de la nature des corps qui se choquent.

Si les corps étaient parfaitement durs, si leurs particules étaient liées de manière à ne pouvoir en aucune façon se prêter au moindre déplacement, le mouvement dans un instant *indivisible* passerait d'un corps dans un autre ; et tout l'effet du choc serait produit à la fois, et au même instant. Mais l'on ne connaît aucun corps qui soit doué de cette parfaite dureté : il n'en

---

(1) En désignant par leurs lettres initiales, la force, la masse, et la vitesse, on aura d'abord $F = MV$, ensuite $F' = M'V'$. D'où, $F : F' :: M : M'$, quand $V = V'$; et $F : F' :: V : V'$, si $M = M'$; et enfin lorsque $F = F'$, il vient $M : M' :: V' : V$.

est aucun qui n'ait quelque flexibilité, et dont les parties ne puissent céder plus ou moins. Ainsi celles qui sont dans la surface antérieure du mobile, commencent à perdre de leur vitesse par la rencontre de l'obstacle, tandisque celles qui sont dans la surface postérieure, conservent encore toute la leur. Le mobile perd donc sa vitesse peu-à-peu, et de même le corps choqué ne prend que peu-à-peu toute la vitesse qu'il peut recevoir. Si le mouvement se fait avec une grande rapidité, le temps de la transmission est plus court; les parties frappées sont presque aussitôt emportées, et le reste du corps choqué ne reçoit aucun ébranlement sensible. Mais si le mouvement est moins prompt, s'il se fait avec une certaine lenteur, alors les parties qui reçoivent le choc, s'ébranlent plus lentement : le mouvement se propage tout aux environs jusqu'à une distance plus ou moins grande; et l'on conçoit que si un second, un troisième coup surviennent avant que l'ébranlement produit par le premier ait cessé, l'obstacle ne peut manquer d'être renversé en totalité. Voici une expérience qui rendra sensible à l'œil ce qu'on vient de dire sur la transmission du mouvement.

Expérience. On pose une baguette de bois sec, de sapin par exemple, sur les bords de deux verres placés à la même hauteur, et portés par deux supports différens. Les verres peuvent être remplis d'eau, ce qui rend l'expérience plus piquante. La baguette doit être mise de manière que ses deux extrémités seules reposent légèrement sur les bords des verres. Elle doit avoir une longueur de 15 à 20 pouces, ou même davantage si l'on veut. Les choses étant ainsi arrangées, on prend en main une petite barre de fer, on

un morceau de bois dur, et se plaçant en face de la baguette, on frappe un coup vigoureux et sec vers le milieu de sa longueur. La baguette à l'instant se casse en deux morceaux, et les verres qui la supportent ne sont nullement endommagés : l'eau même dont ils sont remplis n'éprouve pas la moindre secousse.

Cet effet qui surprend toujours ceux qui en sont témoins pour la première fois, est une preuve bien convaincante que le mouvement ne se transmet pas *subitement* dans toutes les parties du corps frappé. Si cela était, les verres auraient senti le choc, et se seraient brisés au même instant que la baguette a été frappée. La chose encore serait arrivée ainsi, si le coup avait été donné mollement et avec lenteur. Mais comme on suppose qu'il a été ferme et prompt, il suit que la baguette était rompue, et que les deux morceaux étaient enlevés, avant que le choc fût parvenu jusqu'aux verres. Les points d'appui étaient en apparence sur ces verres : mais à cause de la rapidité du mouvement, ils se sont dans la réalité trouvés en l'air, et plus près de l'endroit qui a été frappé ; de façon que les extrémités de la baguette se sont relevées autour de ces points, et séparées ainsi des verres, qui n'ont dû par conséquent recevoir aucun mal, ni même être ébranlés.

On peut conclure de l'expérience qu'on vient de décrire, et de l'explication qu'on en a donnée, que le résultat n'est pas tout-à-fait le même, lorsqu'on augmente la quantité de mouvement du côté de la masse, ou du côté de la vitesse ; et qu'il n'est pas toujours vrai de dire, qu'on fait autant avec un petit marteau mené ra-

pidement, qu'avec un marteau plus lourd mené avec plus de lenteur : ce qui n'empêche pas néanmoins, que la quantité de mouvement ou *la force* d'un corps qui se meut, ne soit toujours exactement exprimée par le *produit* de sa masse et de sa vitesse.

Il y a eu autrefois à ce sujet parmi les savans une difficulté qui semblait être d'une grande importance, et qui les a tenus divisés pendant quelque temps. Les uns voulaient que la force d'un corps en mouvement fût en certains cas égale au produit de sa masse par le *quarré* de sa vitesse : les autres soutenaient que dans tous les cas sa véritable mesure était la masse multipliée par la *simple* vitesse.

On appelle *force morte* celle qui s'exerce contre un obstacle qu'elle ne peut surmonter, et *force vive* celle qui parvient à vaincre cet obstacle. On convenait généralement que les forces mortes devaient s'estimer par la masse et la simple vitesse : mais des savans distingués soutenaient que les forces vives dépendaient de la masse et du quarré de la vitesse. Cette opinion était fortement combattue par d'autres savans également recommandables. L'on ne voit pas en effet comment la résistance plus ou moins grande de l'obstacle pourrait introduire de la différence dans la manière d'évaluer les forces. Cependant on citait de part et d'autre des faits et des expériences, qui semblaient favorables soit à l'un soit à l'autre de ces deux sentimens. Enfin après avoir long-temps et profondément discuté la matière, on reconnut que la diversité des opinions n'était qu'apparente, et qu'on était d'accord sans s'en douter. En effet si l'on conçoit deux corps de masses *égales*, et mus avec des vitesses *différentes*,

et dont l'une soit par exemple *double* de l'autre, il est visible que la vitesse de celui-là ne s'épuisera contre le même obstacle, qu'au bout d'un temps *double ;* et que son action par conséquent sera *quadruple* de l'autre, parce qu'elle sera *double* à raison de la vitesse, et *double* à raison du temps. Mais le rapport des forces des deux mobiles, ou de l'effet dont ils sont capables dans le *même* temps, n'en est pas moins celui de *deux à un*, qui est le rapport de leurs vitesses. La force d'un corps en mouvement doit donc se mesurer toujours par la masse et la simple vitesse ; et cette vitesse est celle dont il jouit au moment où il exerce son action.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT COMPOSÉ.

UNE seule force instantanée ne peut produire qu'un mouvement uniforme et rectiligne. Mais si deux ou plusieurs forces semblables agissaient en même temps sur le même corps, que nous pouvons pour plus d'exactitude considérer comme réduit à l'étendue d'un point matériel, qu'arriverait-il ? Le mobile décrirait encore une ligne droite d'un mouvement uniforme, ainsi que nous allons le faire voir avec quelque détail.

1. *Des forces qui agissent dans le même sens ou en sens contraires.*

Supposons d'abord deux forces égales ou inégales agissant sur un même corps et dans *le même sens.* Il est visible que le mobile obéira à l'une et à l'autre en même temps, et que sa vitesse sera la même que s'il n'était soumis qu'à une seule force *égale à la somme de deux forces* qui agissent sur lui. En effet si les deux forces frappent le mobile au même instant, comme les deux impulsions données dans le même sens ne peuvent se nuire l'une à l'autre, il suit nécessairement qu'elles auront chacune leur effet tout entier, et qu'elles seront ainsi équivalentes à une force *unique* égale à elles deux. Si l'action des deux forces ne se fait pas sentir au même instant, et que l'une d'elles agisse sur

et dont l'une soit par exemple *double* de l'autre, il est visible que la vitesse de celui-là ne s'épuisera contre le même obstacle, qu'au bout d'un temps *double*; et que son action par conséquent sera *quadruple* de l'autre, parce qu'elle sera *double* à raison de la vitesse, et *double* à raison du temps. Mais le rapport des forces des deux mobiles, ou de l'effet dont ils sont capables dans le *même* temps, n'en est pas moins celui de *deux à un*, qui est le rapport de leurs vitesses. La force d'un corps en mouvement doit donc se mesurer toujours par la masse et la simple vitesse; et cette vitesse est celle dont il jouit au moment où il exerce son action.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT COMPOSÉ.

UNE seule force instantanée ne peut produire qu'un mouvement uniforme et rectiligne. Mais si deux ou plusieurs forces semblables agissaient en même temps sur le même corps, que nous pouvons pour plus d'exactitude considérer comme réduit à l'étendue d'un point matériel, qu'arriverait-il ? Le mobile décrirait encore une ligne droite d'un mouvement uniforme, ainsi que nous allons le faire voir avec quelque détail.

1. *Des forces qui agissent dans le même sens ou en sens contraires.*

Supposons d'abord deux forces égales ou inégales agissant sur un même corps et dans *le même sens*. Il est visible que le mobile obéira à l'une et à l'autre en même temps, et que sa vitesse sera la même que s'il n'était soumis qu'à une seule force *égale à la somme de deux forces* qui agissent sur lui. En effet si les deux forces frappent le mobile au même instant, comme les deux impulsions données dans le même sens ne peuvent se nuire l'une à l'autre, il suit nécessairement qu'elles auront chacune leur effet tout entier, et qu'elles seront ainsi équivalentes à une force *unique* égale à elles deux. Si l'action des deux forces ne se fait pas sentir au même instant, et que l'une d'elles agisse sur

le mobile, tandis qu'il obéit déja à l'autre, comme l'impulsion est censée se faire dans un temps infiniment court, le mobile dans cet instant doit être considéré comme en repos relativement à cette seconde action; et par conséquent celle-ci doit encore s'ajouter à la première. Ainsi *des forces qui agissent sur un même corps et dans le même sens, quel que soit leur nombre, s'ajoutent entre elles, et sont équivalentes à une seule force égale à leur somme.* Réciproquement une *seule* force peut être considérée comme la *somme* de deux ou d'un plus grand nombre de forces qui agiraient sur le même corps et dans le même sens. Cette considération est utile dans bien des cas.

Supposons maintenant que le corps soit en même temps sollicité par deux forces *égales et opposées.* Dans ce cas le corps ne pouvant évidemment obéir ni à l'une ni à l'autre, et n'y ayant point de raison pour qu'il se meuve d'aucun côté, le corps demeurera en repos, ou plutôt en équilibre. Ainsi *deux forces égales et opposées se détruisent mutuellement.*

Si les forces étant toujours opposées ne sont point égales, la plus grande des deux pourra être considérée comme partagée en deux parties, l'une égale à la plus petite des deux forces et qui servira à la détruire, et l'autre égale à leur différence. Celle-ci n'ayant pas d'*antagoniste*, produira son effet tout entier, et par conséquent le corps se mettra en mouvement *dans le sens de la plus grande des deux forces*, avec une vitesse *égale à la différence* des vitesses que ces deux forces tendaient à lui imprimer. L'effet sera donc le même que s'il n'était soumis qu'à une seule force, égale à l'*excès* de la plus grande sur la plus petite.

2. *Des forces qui agissent en divers sens, et sur un même point.*

Considérons enfin deux forces qui agissent sur un même corps, en un même point, mais dans deux directions *différentes*, et non opposées. Cherchons quelle est la route que le mobile doit suivre dans ce cas, et quelle sera la vitesse de son mouvement.

D'abord puisque les directions des deux forces sont différentes, et qu'un corps ne saurait évidemment aller par deux chemins à la fois, il est certain que le mobile ne suivra ni l'une ni l'autre de ces directions : mais sa route sera nécessairement comprise dans le plan des deux forces et dans l'angle qu'elles forment entre elles. Elle divisera cet angle en deux parties *égales*, s'il y a *égalité* dans ces deux forces : sinon l'angle sera divisé en deux parties *inégales*, et la route du mobile s'approchera davantage de celle des deux forces qui est la plus grande. Pour trouver dans ce cas la route et la vitesse du mobile, voici quelle est la régle générale.

Soient P et Q (figure 1.re) les deux forces données: à partir du point A où ces forces concourent, et où elles sont appliquées, on prendra sur leurs directions des parties AB, AC proportionnelles à ces forces, c'est-à-dire aux vitesses qu'elles tendent séparément à communiquer, et l'on construira le *parallélogramme* ABDC. La *diagonale* AD de ce parallélogramme sera la route que suivra le mobile, et elle exprimera la vitesse de son mouvement, de la même manière que les côtés AB, AC du parallélogramme expriment les vitesses que chaque force est capable de produire toute seule. L'effet résultant de l'action combinée des deux

forces P et Q, est donc représenté en *grandeur* et en *direction* par la droite AD ; de façon que ces *deux forces*, en agissant ensemble, ne font pas plus que ne ferait une force *unique*, qui agirait dans le sens AD, et qui serait représentée par cette même droite. Cette force unique s'appelle la *Résultante* des deux autres.

Les géomètres ont cherché différentes démonstrations du théorème qu'on vient d'établir, et qui est comme le fondement de toute la Mécanique : mais les unes sont peu rigoureuses, et les autres sont trop longues et trop laborieuses ; de sorte qu'il nous manque encore sur cet objet une démonstration simple et néanmoins exacte, qui puisse satisfaire tous les esprits. Nous nous bornerons ici à faire connaître ce qu'il y a de plus facile à comprendre, et nous exposerons ensuite quelques-unes des preuves expérimentales qui viennent à l'appui de notre proposition.

3. *Démonstration du parallélogramme des forces.*

Pour démontrer le théorème ci-dessus, qu'on appelle du *parallélogramme des forces*, M. l'Abbé Marie suppose que le corps est posé sur un plan *mobile*, et que pendant que le plan se meut suivant la droite AB (fig. 1), le corps est frappé suivant une direction quelconque AC, et reçoit dans ce sens une vitesse capable de le porter en C, dans le temps qu'il faut au plan pour avancer de la quantité AB. Tous les points de la droite que le mobile parcourt sur le plan, avançant uniformément avec ce plan, il est bien évident que le mobile au bout de ce temps sera arrivé en D, et qu'il aura dans son mouvement suivi la *diagonale* AD du *parallélo-*

gramme construit sur les droites AB et AC, qui expriment les directions et les vitesses des deux forces.

Dans la démonstration qu'on vient de rapporter, l'un des deux mouvemens est communiqué au mobile par le moyen du plan sur lequel il repose. Le mobile en vertu de ce mouvement qu'il est forcé de partager, et de celui qu'il reçoit immédiatement d'une force impulsive, est bien en effet amené au point D, et suit nécessairement la diagonale AD : mais on pourrait douter que le résultat fût le même, dans le cas où le mobile serait tout-à-fait libre, et poussé en même temps par les deux forces, suivant AB et AC.

D'autres auteurs démontrent la même proposition de la manière suivante. Ils partent du cas où les deux forces qui sollicitent le mobile, sont *perpendiculaires* entre elles. Dans ce cas, dit-on, les deux forces ne peuvent ni se nuire, ni s'entr'aider. Il faut donc qu'elles aient l'une et l'autre leur effet tout entier ; et c'est justement ce qui arrive, lorsque le mobile suit la diagonale, et qu'il vient à l'angle opposé du parallélogramme construit comme on a dit. En effet supposons que la force P (fig. 2) soit capable en agissant toute seule, d'amener le mobile en B dans *une seconde* de temps ; et que la force Q puisse aussi toute seule le faire arriver en C dans le même temps : on voit que ces deux forces seront satisfaites toutes les deux, si le mobile parvient au point D en *une seconde.* Car il sera à ce point autant avancé que l'exige l'une des forces, et autant abaissé que le demande l'autre. Il est d'ailleurs visible, qu'il n'y a pas sur *le plan des forces* d'autre point qui puisse remplir les mêmes conditions. Le mobile en vertu de l'action *simultanée* des deux forces

perpendiculaires P et Q, suivra donc la diagonale du *parallélogramme rectangle* ABDC, et arrivera au point D dans le même temps qu'il aurait mis à parvenir en B ou en C, s'il n'avait obéi qu'à une seule force.

Puisque l'effet des *deux* forces P et Q agissant *ensemble et à angle droit* sur un même mobile, est d'amener ce mobile en D, en lui faisant décrire la diagonale AD du *rectangle* ABDC ; il suit que l'on peut à ces deux forces substituer une force *unique* R, dont la grandeur et la direction seraient exprimées par cette diagonale. Celle-ci, comme on a dit, s'appelle la *Résultante* des deux autres, et elle est toujours située dans leur plan.

Réciproquement une force *unique* R qui agirait sur un mobile dans une direction déterminée AD, peut être considérée comme le produit de *deux* autres forces perpendiculaires entre elles, et telles que cette force unique puisse être leur résultante. Deux forces données de grandeur et de direction ne peuvent avoir qu'*une* résultante : mais une force entièrement connue peut être la résultante d'une infinité de *couples* de forces rectangulaires. On sent que sur une droite prise pour diagonale, et dans un plan donné, on peut construire un nombre infini de rectangles différens.

Passons maintenant au cas plus général, où les deux forces font entre elles un angle quelconque. Soient encore P et Q (fig. 3 et 4) les deux forces données, et soient prises sur leurs directions les parties AB, AC qui leur soient *proportionnelles*. Construisons le parallélogramme ABDC, et par le point A, et dans le plan des

forces, menons une droite perpendiculaire à la diagonale AD. On pourra considérer la force P comme produite par deux forces rectangulaires P′ et P″, agissant l'une suivant la diagonale AD, et l'autre suivant la perpendiculaire. En prenant donc AB qui représente la force P, comme une diagonale, on construira le parallélogramme AEBF, et l'on aura les deux forces AD, AF pour celles qui dans le cas présent ont dû produire cette force P. En opérant de même, on décomposera la force Q en deux forces perpendiculaires, Q′ et Q″, agissant suivant les mêmes droites que les précédentes ; et l'on aura AG et AH pour exprimer ces deux forces. Ainsi au lieu de n'avoir que *deux* forces appliquées au point A, on en aura *quatre*, qui leur sont *équivalentes*, et qui concourent au même point. Or de celles-ci, il y en a *deux* P′ et Q′, qui sont *égales* et *opposées*, et qui par conséquent se détruisent mutuellement. Il ne restera donc que les deux autres P″ et Q″, qui agissant dans le même sens et suivant la même droite, doivent *s'ajouter* l'une à l'autre. La première de celles-ci est, comme on a vu, exprimée par AF : la seconde l'est par AH; et leur somme est égale à AD. Donc en vertu de l'action combinée des forces P et Q, le mobile *décrira* la diagonale du parallélogramme ABDC, et sa vitesse dans ce sens sera exprimée par AD. Le théorème énoncé ci-dessus a donc lieu, quel que soit l'*angle* formé par les directions des deux forces ; mais dans le cas où cet angle est *aigu* (fig. 3) les forces s'entr'aident mutuellement, et elles se nuisent au contraire, lorsqu'elles font un angle *obtus* (fig. 4).

Deux forces appliquées en un même point, et faisant entre elles tel angle qu'on voudra, ont toujours

pour résultante une force *unique* qui est dans leur plan, et dont il est facile de trouver la grandeur et la direction, lorsque l'on connaît celles des forces *composantes*. De même une force *unique* peut être dans tous les cas considérée comme produite par *deux* forces appliquées au même point que celle-là, faisant d'ailleurs entre elles tel *angle* qu'on jugera à propos, et ayant telles *directions* qu'on voudra : seulement la *grandeur* de chacune d'elles dépendra de ces deux dernières conditions ; et elle devra être telle, que la force donnée puisse être en effet la résultante des deux forces choisies, ou ce qui est la même chose, être la diagonale d'un parallélogramme, dont ces deux forces seraient les côtés adjacens. On voit encore ici qu'une même force peut être la résultante d'une infinité de forces différentes combinées deux à deux ; parce que sur la même droite prise pour diagonale, et dans un même plan, on peut construire un nombre infini de parallélogrammes différens.

Le résultat auquel nous venons d'arriver, peut s'étendre à un nombre de forces quelconque. Supposons en effet que le point mobile A soit sollicité à-la-fois par les forces P, Q, S, (fig. 5) renfermées ou non dans un même plan, mais qui lui sont immédiatement appliquées. On trouvera facilement la route du mobile, et la vitesse qu'il doit prendre, en procédant de la manière qui suit. On combinera d'abord deux de ces forces, P et Q, par exemple, et l'on cherchera par le moyen indiqué leur résultante R. Ensuite combinant cette résultante R avec la troisième force S, on trouvera une seconde résultante T, qui sera en même temps celle des trois forces P, Q et S. En continuant de même, on trouverait la résultante finale de tant

de forces que l'on voudra. En vertu de l'action simultanée des trois forces données, le point mobile se mettra donc en mouvement suivant la droite AT, et avec une vitesse exprimée par AK; et l'effet sera le même que si au lieu des trois forces qu'on a représentées par les droites AB, AC, AG, il n'y en avait eu qu'une seule exprimée en grandeur et en direction par AK. Au reste le résultat demeure toujours le même, quelque ordre que l'on suive dans la combinaison des forces données.

Lorsqu'à deux ou à un plus grand nombre de forces, on en substitue une seule qui leur est équivalente, et capable du même effet, cela s'appelle *composer les forces :* et le problème qui a pour objet de trouver la résultante d'un nombre quelconque de forces, s'appelle le problème de la *composition des forces.* Le mouvement qui résulte de leurs actions combinées, est dit *mouvement composé*, quoiqu'il se fasse toujours, ainsi qu'on vient de voir, suivant une ligne droite, avec une vitesse uniforme, et de la même manière que s'il était dû à une action simple et unique.

Lorsqu'au contraire on considère une seule force comme produite par le concours de deux ou d'un plus grand nombre de forces, cela s'appelle *décomposer* la force; et le problème qui a pour objet de trouver les forces capables de produire celle en question, est appelé le problème de la *décomposition des forces.* Le mouvement *simple* du mobile est alors considéré comme le résultat de divers mouvemens qui n'ont pas pu avoir lieu séparément, mais qu'on peut supposer existans *virtuellement* dans ce mobile. Ainsi dans le cours des astres au dessus de nos têtes, on peut considérer deux

sortes de mouvement, l'une dans le sens *vertical* par lequel ils s'élèvent ou s'abaissent à l'égard de l'horizon, et l'autre dans le sens *horizontal*, par lequel ils s'avancent constamment du levant au couchant. La composition et la décomposition des forces sont d'un usage continuel en Mécanique.

4. *Preuves expérimentales.*

Les résultats qu'on vient d'obtenir par le raisonnement, peuvent être confirmés par l'expérience, et c'est de cette dernière espèce de preuve que l'on fait plus volontiers usage en physique.

Première expérience. On a une tablette verticale, qui porte dans sa partie supérieure deux fils de métal, tendus parallèlement entre eux dans un plan horizontal. Une poulie à deux gorges est assujettie à se mouvoir le long de ces deux fils, et ne peut avancer, ni reculer, sans tourner en même temps sur elle-même. Enfin un poids est suspendu à un cordon, qui se roule sur une des gorges de la poulie pendant son mouvement en avant.

Les choses étant donc ainsi disposées, on voit que si l'on fait mouvoir la poulie *horizontalement* le long des deux fils, le poids s'élèvera *verticalement* et parallèlement à la tablette; et qu'au moyen de la simultanéité de ces deux mouvemens, son ascension se fera suivant une droite *oblique* à l'horizon.

Le poids est ici soumis à deux forces qui sont perpendiculaires entre elles : il est tiré *de bas en haut* par le cordon, qui s'accourcit à mesure qu'il se roûle sur la poulie; et il est forcé d'avancer *de gauche à droite*, en même temps que la poulie se meut dans ce sens.

Pour obéir donc à ces deux efforts à la fois, il suit la ***diagonale du rectangle*** construit sur les directions des deux forces, et dont les côtés leur sont proportionnels.

L'appareil qu'on vient de faire connaître, laisse peut-être quelque chose à dire, pour la rigueur de la démonstration. Le mobile est ici dans un état d'assujettissement, et n'est point libre pendant la durée de son mouvement. Les choses ont été arrangées d'avance pour obtenir un *certain effet*, et l'on peut douter qu'il eût été le même, si l'on avait laissé le mobile en toute liberté, et qu'on l'eût abandonné à lui-même, après avoir reçu les deux impulsions. Cependant il faut avouer que cette expérience est très-propre à faire voir, comment deux forces agissant sur un mobile dans des directions perpendiculaires entre elles, peuvent produire un mouvement simple suivant une direction moyenne ; et réciproquement comment un mouvement simple sur une droite donnée peut être décomposé en deux autres mouvemens dont celui-là serait le résultat. Au reste, voici une autre expérience, qui lèvera tous les doutes à ce sujet, et ne laissera rien à desirer pour l'entière démonstration de notre théorème.

Deuxième expérience. On trouve dans les cabinets de physique une espèce de billard, qui porte sur un de ses petits côtés deux plans verticaux, que l'on peut incliner plus ou moins l'un à l'autre. Deux marteaux d'ivoire sont attachés à ces plans, et peuvent se mouvoir parallèlement à eux à la façon des pendules. Une bille d'ivoire est placée à leur point de concours, de manière que les deux marteaux en tombant puissent la frapper tous les deux en même temps, et dans deux

directions différentes. On a donc ainsi un appareil au moyen duquel on peut se procurer deux forces *instantanées* de grandeurs égales ou non, agissant à la fois sur le même mobile, et faisant entre elles tel angle qu'on voudra.

Maintenant si l'on fait d'abord tomber *séparément* chaque marteau d'une certaine hauteur, et qu'on marque avec de la craie sur le tapis la route que la bille aura suivie à chaque fois : que l'on construise un parallélogramme sur ces deux droites, et qu'on en trace la diagonale ; on observera que la bille suivra fidèlement cette diagonale, lorsqu'elle sera frappée à la fois par les deux marteaux, avec la même force, et dans les mêmes directions qu'auparavant. Ici le mobile jouit de la plus entière liberté : il suit sans aucune contrainte la route qui lui a été tracée ; preuve incontestable que la loi qu'on a établie, est bien en effet la loi de la nature.

5. *Exemples du Mouvement composé.*

Les exemples de la *composition* du mouvement ne sont pas rares soit dans la nature, soit dans les arts. Les poissons en fournissent d'abord un qui est fort remarquable. Lorsqu'ils veulent avancer en ligne droite devant eux, on observe qu'ils frappent l'eau avec leur queue successivement et rapidement dans deux sens, à droite et à gauche. Le coup qu'ils donnent à droite, les pousserait vers la gauche : celui qu'ils donnent à gauche, les porterait vers la droite : mais comme les deux coups sont frappés très-promptement, et presque en même temps, il arrive que le poisson ne suit aucune de ces deux directions ; et qu'il en prend une qui tient le

milieu entre elles, avançant ainsi devant lui, comme il veut. (*)

Le batelier imite cette industrie des poissons, lorsque pour avancer il appuie son aviron contre le fond de la rivière, alternativement de l'un et de l'autre côté. Pareillement lorsqu'on veut faire remonter un bateau sur un canal où l'eau est rapide, on emploie deux hommes, qui marchant dans le même sens sur l'un et l'autre bord, tirent le bateau chacun par une corde. Ainsi sollicité suivant deux directions différentes, le bateau ne suit ni l'une ni l'autre; mais il prend une direction *moyenne*, par laquelle il obéit aux deux forces autant qu'il est possible, et remonte contre le courant.

Les exemples de la *décomposition* du mouvement sont également fréquens. Le bac qui traverse la rivière par la seule impulsion du courant, nous en offre un cas très-curieux. Le bateau est tenu dans une position inclinée au cours de l'eau, et par ce moyen la puissance motrice le frappe dans une direction *oblique*. Ce choc peut être considéré comme produit par deux forces, dont l'une serait *parallèle* à la longueur du bac, et par conséquent sans effet sur lui, et l'autre *perpendiculaire* à cette même longueur, et pousserait ainsi le bac vers la rive opposée. Pour obéir à cette dernière force, le bateau s'approcherait donc du bord, en des-

---

(*) Un Mécanicien de Lyon, M. *Etienne*, en imitant ce jeu avait construit un petit bateau qui de lui-même avançait sur une eau tranquille. Le bateau portait sur l'arrière un petit gouvernail qui était mis en mouvement par un ressort, et frappait l'eau alternativement dans les deux sens.

cendant en même temps le long de la rivière : mais une corde qui le retient, détruit par sa résistance ce dernier mouvement, et ne laisse subsister que celui par lequel le bateau s'approche du rivage. Telle est la manière dont il faut concevoir comment l'impulsion du courant, peut produire un mouvement *perpendiculaire* à la direction de ce courant. C'est ainsi pareillement qu'on peut expliquer, comment s'élève dans les airs le cerf-volant des enfans par l'impulsion du vent combinée avec la résistance de la ficelle que l'enfant tient dans sa main.

6. *Des forces qui agissent en divers sens, et sur des points différens.*

On a considéré jusqu'ici les corps comme des points matériels, ou bien on a supposé que les forces étaient appliquées en un même point du corps mobile. Mais si le corps à mouvoir avait un volume quelconque, et que les forces fussent appliquées à différens points de ce corps : alors, en ne considérant d'abord que le cas de deux forces, pour que ces forces puissent se réduire à une seule, et avoir ainsi une résultante, il faudra qu'en prolongeant leurs directions, elles aillent se rencontrer quelque part. C'est donc à ce point de rencontre qu'on les supposera appliquées ; et l'on concevra ce point, s'il est hors du corps, comme lié avec le corps d'une manière invariable. C'est aussi là que l'on construira le parallélogramme, dont la diagonale exprimera toujours la grandeur et la direction de la résultante. L'on prendra pour le point d'*application* de cette dernière, l'un quelconque de ceux où elle rencontre le corps.

S'il y a plus de deux forces, qui soient toutes appliquées à des points différens du corps, après avoir trouvé la résultante des deux premières, dans le cas où leurs directions prolongées peuvent se rencontrer; il sera nécessaire que cette résultante puisse aussi rencontrer en dedans, ou au dehors du corps, la direction de la troisième force ; et alors on obtiendra par le procédé connu une seconde résultante qui sera aussi celle des trois premières forces. En continuant de même, et en supposant toujours la même condition, on arrivera à une dernière résultante qui sera celle de toutes les forces données, et qui fera connaître le mouvement du corps soumis à leur action.

Mais si, en nous bornant au cas de deux forces, les directions prolongées de ces forces ne peuvent pas se rencontrer, elles ne pourront pas être ramenées à une seule force, et le corps obéira d'abord à l'une et à l'autre, autant qu'il se pourra : il commencera donc à tourner sur lui-même, jusqu'à ce que les deux forces qui agissent sur lui, soient parvenues à se trouver dans un *même plan.* Alors celles-ci pouvant se rencontrer, elles auront une résultante commune, qui déterminera le mouvement ultérieur du corps. En général quels que soient le *nombre* et la *direction* des forces, on fait voir qu'elles peuvent toujours se réduire à *deux*, qui sont dans le cas que l'on vient de considérer. (*)

7. *Des forces parallèles.*

Il nous reste à examiner le cas où le corps serait sollicité par des forces qui sont *parallèles* entre elles.

(*) Voyez à la fin la Note (*b*).

Nous n'en considèrerons d'abord que *deux*, qne nous ferons agir dans le même sens, et que nous supposerons *égales*. Ici, comme il est évident, le point où les forces concourent, est infiniment éloigné : mais l'angle qu'elles formeraient entre elles, si elles étaient inclinées l'une à l'autre, devant à cause de leur égalité, être partagé en deux également par la direction de la résultante, il suit que cette résultante passera dans le cas présent par le milieu de l'intervalle qui sépare les *points d'application* des deux forces. D'ailleurs puisque ces forces agissent dans le *même sens*, leur résultante sera égale à leur *somme*, et agira dans le *sens* de ces forces, et leur sera *parallèle*.

Si les deux forces sont *inégales*, la résultante n'en sera pas moins *égale* à leur somme, et elle leur sera toujours parallèle, et agira dans le même sens : mais elle coupera la droite qui unit les points où elles sont appliquées, en deux parties *inégales*, passant d'*autant plus près* de la *plus grande* des deux forces. On établit que cette droite dans le cas présent, est partagée par la direction de la résultante en deux parties *réciproquement* proportionnelles aux forces. Dans la fig. 6.e, si la force P est *moitié* de la force parallèle Q, AC sera le *double* de BC, et la résultante R *égale* à la somme P *plus* Q, passera par le point C.

Puisque *deux* forces parallèles agissant dans le même sens, peuvent dans tous les cas être ramenées à *une seule* force capable du *même* effet : de même il sera toujours possible, *une seule* force étant donnée, d'en trouver *deux*, qui lui soient parallèles, et soient capables de produire *ensemble* ce que l'autre aurait fait toute *seule*. La régle qu'on vient d'établir, est suf-

fisante pour faire trouver sans peine la *grandeur* et la *position* des deux forces demandées. (1)

Si le nombre des forces parallèles est plus considérable, et qu'elles agissent toutes dans le même sens, alors qu'elles soient ou non situées dans un même plan, on trouvera leur résultante commune de la manière suivante. On cherchera d'abord, comme on vient de dire, celle R′ (fig. 7) des forces P et Q : on combinera ensuite celle-ci dont la valeur est P *plus* Q, avec la force S, et l'on obtiendra une nouvelle résultante R, qui sera *égale* aux trois forces P, Q, S, qui leur sera *parallèle* et agira dans le *même sens*. En continuant de la même manière, on trouvera facilement la résultante de tel nombre de forces parallèles qu'on voudra, et cette résultante remplira toujours les trois conditions ci-dessus.

Les points d'application des forces étant donnés, il y aura aussi un *point*, où la résultante sera censée être appliquée, et où, si l'on applique en effet une force unique *égale* à la somme des forces données, et agissant dans le *même* sens, l'effet obtenu sera absolument le même.

Si l'on conçoit que les forces tournent sur leurs points d'application, sans cesser d'être parallèles entre elles (fig. 7.), leur résultante tournera aussi, en demeurant toujours appliquée à *un même point*. Ce point est très-important en mécanique, et s'appelle le *centre*

(1) Soit une force unique R égale à 6 ; on veut la décomposer en deux forces parallèles 4 et 2. Il faudra pour cela, que la force 4 passe une fois plus près de R, que la force 2. Si les distances à R étaient données, on diviserait 6 en deux parties réciproquement proportionnelles à ces distances.

des forces parallèles. On le trouve facilement, en cherchant les résultantes du système des forces dans *deux* positions différentes : ce point est celui où se croisent les deux résultantes trouvées.

Il pourrait se faire que les forces parallèles agissent, les unes dans un sens, et les autres dans le sens contraire. Alors on chercherait séparément la résultante des unes et des autres, et l'on n'aurait ainsi à considérer que deux forces parallèles agissant en *sens contraire.* Si ces deux forces sont égales, et qu'elles soient dirigées suivant la *même* droite, il y aura *équilibre*, et le mobile demeurera en repos. Si les forces étant toujours égales, leurs directions sont seulement contraires, sans être opposées, le corps pour obéir à ces deux actions tournera sur lui-même, jusqu'à ce que l'opposition ait lieu; après quoi l'équilibre s'établira. Enfin si les deux forces sont *inégales*, le même mouvement aura lieu encore, jusqu'à parfaite opposition, et alors la plus petite des deux forces se trouvant détruite, le mobile obéira à la plus grande avec une vitesse dépendante de l'*excès* de l'une sur l'autre.

Dans ce dernier cas de deux forces *parallèles contraires* et *inégales*, il y a néanmoins une résultante, qui est égale à la *différence* des deux forces, qui agit dans le *sens* de la plus grande, et dont on trouve le point d'application, en décomposant celle-ci en *deux*, l'une égale et opposée à la plus petite des deux forces, et qui servira par conséquent à la détruire, et l'autre égale à leur différence, et qui aura son entier effet. Le point où celle-ci est appliquée, se trouvera facilement d'après ce qui a été établi ci-dessus.

CHAPITRE IV.

DU MOUVEMENT TROUBLÉ PAR UN OBSTACLE INÉBRANLABLE.

Lorsqu'un point matériel a été tiré de l'état de repos, soit par l'action d'une seule force instantanée, soit par les actions combinées de plusieurs forces, qui peuvent toujours, comme on a vu, être ramenées à *une seule*, le mobile suit constamment une *même ligne droite*, qui est la direction de cette force unique, et son mouvement se fait avec une *vitesse uniforme*, au moins quand on fait abstraction des causes extérieures, qui peuvent altérer cette direction et cette vitesse. Mais si le mobile vient à rencontrer sur sa route quelque obstacle, alors il doit arriver dans son mouvement des changemens, que nous avons à considérer ici. Nous commencerons par le cas où l'obstacle oppose au mobile une résistance insurmontable.

1. *Mouvement anéanti par l'obstacle.*

Soit un mobile qui vient avec une vitesse quelconque heurter *directement* un obstacle inébranlable : il est évident d'abord que ce mobile sera arrêté dans sa marche, et qu'il perdra toute la vitesse dont il est animé. Si l'on suppose que l'obstacle et le mobile sont l'un et l'autre parfaitement durs, et qu'ils sont tous les deux dépourvus d'*élasticité*, le mouvement sera anéanti

subitement, et l'obstacle ni le mobile n'éprouveront aucune altération dans leur figure, puisque leurs parties sont censées ne pouvoir du tout point être déplacées. Mais si l'un et l'autre étant toujours *non-élastiques*, sont néanmoins doués d'une certaine *mollesse;* alors le mouvement périra bien encore tout-à-fait, mais *peu-à-peu*. Il se fera dans tous les deux un changement de figure plus ou moins sensible : le mobile sera *aplati*, et la surface de l'obstacle se trouvera *enfoncée* à l'endroit du choc; ce qui ne peut laisser aucun doute sur la manière dont le mouvement s'est perdu. Il est évident que cette altération n'aurait eu lieu que dans l'une des deux surfaces, si l'autre eût été parfaitement dure.

L'observation que nous venons de faire, nous fournit l'occasion d'exposer ici une *loi générale* de la nature, qui a lieu toutes les fois que des corps agissent les uns sur les autres, et qui est, que *la réaction est toujours égale à l'action*. Lorsqu'un corps en mouvement communique de sa vitesse à un corps en repos, le premier perd toujours de son mouvement autant qu'il en donne à l'autre. C'est l'inertie de celui-ci qui *réagit* pour ainsi dire contre l'autre corps, et lui dérobe une partie de sa force. L'effet *physique* qu'éprouve le corps en mouvement, est le même que si étant en repos, il recevait un choc pareil de la part de l'autre corps. Ainsi deux personnes qui se heurtent avec violence, se font également du mal l'une à l'autre; et si étant en mouvement, nous venons à rencontrer un obstacle immobile, le coup que nous recevons par ce choc, est accompagné d'autant de douleur, que si étant restés en repos, l'obstacle eût été poussé contre nous avec

la même force. Un batelier qui veut approcher du bord, tire à lui une corde attachée au rivage, et en faisant effort comme pour amener la terre à lui, c'est lui qui s'approche de la terre. Deux hommes placés sur deux bateaux différens s'approchent mutuellement l'un de l'autre, lorsqu'au moyen d'une corde, ils font effort l'un contre l'autre.

On a considéré le cas où le mobile vient heurter l'obstacle *directement*, c'est-à-dire, dans un sens *perpendiculaire* à la surface de cet obstacle. Mais si le choc se faisait dans une direction *oblique* à cette surface, qu'arriverait-il ? D'abord le mouvement ne pourrait pas être détruit en totalité, puisque l'obstacle ne lui oppose qu'une résistance *indirecte*, et par conséquent imparfaite. Une partie du mouvement doit donc s'anéantir, et une autre partie doit subsister après le choc. C'est donc ici le cas de considérer le mouvement *simple* du mobile comme composé de *deux* mouvemens, l'un *perpendiculaire* à la surface de l'obstacle, et l'autre qui lui est *parallèle*. Le premier est nécessairement détruit par la résistance absolue que l'obstacle lui oppose. Mais le dernier n'étant contrarié par rien, subsistera tout entier, et continuera sans altération après la rencontre des deux corps. Ainsi le mobile qui vient frapper *obliquement* un obstacle, perd bien une partie de sa vitesse ; mais il continue de se mouvoir avec ce qui lui en reste, suivant une direction *parallèle* à la surface choquée. Le défaut de dureté absolue occasionne bien encore ici une altération dans les figures; mais il ne change rien à la loi qu'on vient d'établir.

2. *Mouvement réfléchi.*

Supposons maintenant que l'obstacle et le mobile soient tous les deux doués *d'élasticité*, et voyons ce que cette nouvelle circonstance introduira dans l'effet du choc. Considérons d'abord le cas où il se fait *perpendiculairement.* Premièrement la vitesse du mobile s'épuisera toute entière, et son mouvement *en avant* sera anéanti. En second lieu les particules des corps élastiques étant susceptibles de quelque déplacement intérieur, le changement de figure remarqué tout-à-l'heure, aura encore lieu ici au moment de la rencontre ; mais l'élasticité rétablissant les choses dans leur premier état, avec la *même* vivacité et la *même* force qu'elles en ont été tirées, le mobile sera repoussé dans le sens contraire, et reprendra *en arrière* toute la vitesse qu'il avait perdue. Ce mouvement qui recommence ainsi dans une nouvelle direction, s'appelle mouvement *réfléchi*, et demande à être expliqué avec quelque détail.

Soit A (fig. 8) un mobile de forme sphérique, et BC la surface plane qu'il vient heurter dans la direction perpendiculaire AD. Donnons au mobile seul la propriété élastique, et supposons l'obstacle parfaitement dur. Il est évident que le point antérieur *a* de celui-là étant subitement arrêté, tandis que les points plus reculés continuent d'avancer, il perdra sa forme ronde et s'aplatira de plus en plus, jusqu'à ce que tout son mouvement soit épuisé. Il cesserait donc alors de se mouvoir, s'il n'y avait en lui une certaine force, qui tend à lui faire reprendre sa forme première, et à rétablir ses parties dans leurs positions respectives. Les

points refoulés vers le centre, font donc effort pour s'en éloigner de nouveau, et comme le plan leur oppose de son côté une résistance insurmontable, il est donc nécessaire qu'ils réagissent sur le centre, et le repoussent loin d'eux. Le mobile rejaillira donc en arrière, suivant la même perpendiculaire AD, et reprendra toute la vitèsse qu'il avait auparàvant; nous le supposons parfaitement élastique. L'élasticité remplit donc ici les fonctions d'une force nouvelle, égale et opposée à celle dont le mobile était animé, mais dont l'action ne commence à se faire sentir que lorsque celle-ci a été épuisée par la résistance de l'obstacle.

Lorsque le mouvement change ainsi de direction à la rencontre d'un obstacle, et qu'il se *réfléchit* par l'effet de l'élasticité, on appelle la ligne AD que décrit le mobile avant la rencontre, *ligne d'incidence*, et celle DA' qu'il suit après, se nomme *ligne de réflection.* Les angles que ces droites font avec le plan de l'obstacle, s'appellent angles *d'incidence et de réflection.*

Dans le cas que l'on vient de considérer, les directions que suit le mobile *avant* et *après* le choc, ne font qu'une seule et même droite, et les deux angles se confondent en un seul. Ce n'est plus la même chose, lorsque la rencontre se fait suivant une direction *oblique* à la surface donnée.

Supposons que le mobile A (fig. 9) toujours élastique, vient frapper le plan BC suivant la droite *inclinée* AD. Il se fera encore ici un aplatissement : mais les parties comprimées ne seront plus disposées *symétriquement* par rapport à la ligne que décrit le centre du mobile : elles seront en plus grand nombre du côté par lequel cette ligne incline vers le plan. Ainsi quand le

mobile aura cessé d'avancer dans sa direction première, la force de *répulsion* qui vient de l'élasticité, agira plus de ce côté que de l'autre, et la sphère rejaillira suivant une nouvelle direction, *également* inclinée à la surface de l'obstacle, et qui d'ailleurs se trouvera renfermée dans le plan mené par la première droite et par la perpendiculaire élevée au point de rencontre.

On peut démontrer facilement cette proposition, en faisant usage, comme ci-devant, du principe de la *décomposition* du mouvement. Quelle que soit la puissance qui a poussé le mobile suivant la droite AD, le mouvement de celui-ci peut être considéré comme résultant de deux impulsions AE et AG, l'une *perpendiculaire*, et l'autre *parallèle* à la surface de l'obstacle. C'est donc comme si le mobile avait à la fois ces deux mouvemens. Or la résistance de l'obstacle ne peut évidemment détruire que la vitesse perpendiculaire ; et elle est absolument nulle à l'égard de la vitesse parallèle. Celle-ci subsiste donc toute entière après le choc ; et le mobile doit continuer d'avancer dans ce sens, comme s'il n'avait rencontré aucun obstacle. Mais la vitesse perpendiculaire lui étant restituée par l'élasticité, en entier et dans un sens contraire, il suit qu'après le choc il est encore soumis à deux forces, l'une DK égale à AG, qu'il a conservée, et l'autre DG, qui lui a été restituée, et qui est égale et contraire à AE. Le mobile donc en vertu de ces deux forces, suivra la diagonale du parallélogramme DKGA′, qui est égal au parallélogramme AEDG, et placé de la même manière par rapport au plan donné. Les deux routes AD, et DA′ qui sont les diagonales de ces parallélogrammes, sont dont également inclinées à la surface de l'obstacle; ce qu'il fallait prouver.

On exprime la loi qu'on vient de démontrer, en disant que dans le mouvement réfléchi, *l'angle de réflection est égal à l'angle d'incidence.* Mais cela suppose que l'élasticité est parfaite, c'est-à-dire que les parties déplacées par la compression, se rétablissent avec une force et une vitesse égales à celles qui ont servi à les comprimer. Si ce rétablissement se fait d'une manière *plus faible* ou *plus lente*, alors la force de répulsion exprimée par DG sera *plus petite*, et représentée par exemple par Dg, tandis que DK reste le même. Dans ce cas, comme il est visible, la diagonale du parallélogramme inclinera davantage vers le plan, et l'angle de réflection sera plus petit que l'angle d'incidence. C'est ce qui arrive plus ou moins à la rencontre de tous les corps, parce que leur ressort est toujours plus ou moins imparfait. Il faut observer encore que la vitesse *parallèle* DK que l'on a supposée constante, s'affaiblit néanmoins dans la réalité : ce qui nuit encore à la parfaite égalité des angles d'incidence et de réflection. Au reste ce qui a été démontré en supposant que l'élasticité appartenait au seul mobile, se prouverait de même en donnant cette propriété à l'obstacle seul, ou bien à l'un et à l'autre en même temps.

3. *Exemples du mouvement réfléchi.*

On peut citer bien des exemples du mouvement réfléchi des corps élastiques : mais on ne voit nulle part mieux qu'aux jeux de paume et de billard, les lois et les effets de cette *réflection.* Au jeu de paume il faut que le joueur en voyant la direction de la balle lancée contre le mur, juge sur-le-champ de la direction qu'elle suivra à son retour ; et si elle vient à frapper le pavé,

il faut qu'il sache prévoir comment elle se relèvera. Au jeu de billard, il doit savoir connaître d'avance suivant quelle direction rejaillira une bille poussée contre la bande; et ce n'est qu'au moyen de cette connaissance, qu'il peut par un mouvement réfléchi, qui s'appelle en termes de l'art une *bricole*, jeter dans la *blouse* la bille de son adversaire. C'est l'habitude et l'exercice qui donnent ordinairement cette habileté : voici néanmoins une méthode géométrique pour arriver à la solution de ce problème.

Problème. Soit MNPQ (fig. 10) le billard, A une bille qui doit aller frapper *directement* la bille B, après avoir touché auparavant la bande MN. On demande quel est le point de MN sur lequel la bille A doit être poussée, pour qu'en se réfléchissant elle vienne choquer comme il faut la bille B.

Solution. Du centre de A j'abaisse une perpendiculaire AD sur MN, et je la prolonge au-delà d'une quantité DC égale à AD. Du point C je mène la droite CB dirigée au centre de la seconde bille : cette droite rencontre en E la bande MN ; et je dis que c'est contre ce point E que la bille A doit être poussée, pour qu'elle puisse après la réflection frapper directement la bille B. En effet il est facile de voir qu'au moyen de cette *construction*, les angles que font avec la bande les droites AE, et BE, sont égaux; et par conséquent que si AE est la ligne d'incidence, BE sera la ligne de réflection. Le problème proposé est donc résolu.

Si l'on voulait résoudre la même question par deux *bricoles*, c'est-à-dire en obligeant la bille A de toucher deux des bandes du billard, et de se réfléchir deux fois avant de choquer la bille B, voici la construction qu'il

faudrait faire. Après avoir comme tout à l'heure, abaissé la perpendiculaire AD′ sur la première bande PM, et pris D′C′ égal à AD′, on mènera du point C′ la droite C′F parallèlement à cette bande, et prolongeant l'autre bande NM jusqu'à la rencontre de la parallèle C′G, on prendra FG égal à C′F, et du point G on menera la droite GB, qui rencontrera la bande NM au point K. On tracera ensuite C′K, qui donnera le point E′ de la bande PM pour celui contre lequel il faudra pousser la bille A, afin qu'elle vienne choquer la bille B après avoir subi les deux réflections exigées.

On peut encore reconnaître facilement ici, que la construction décrite donne les angles au point E′ égaux entre eux, de même que ceux qui sont faits au point K. La bille A tombant sur la bande PM par la droite AE′, se relèvera donc suivant E′K, et rencontrant la bande MN dans cette dernière direction, elle se réfléchira nécessairement selon la droite KB. Donc elle arrivera par une double réflection au point demandé; et la ligne brisée AE′KB tracera la route du mobile.

Lorsqu'un corps animé d'une grande vitesse, vient à rencontrer dans une direction *fort oblique* la surface d'une eau tranquille, le liquide n'ayant pour ainsi dire pas le temps de céder, oppose au mobile une résistance pareille à celle d'un corps solide parfaitement dur. Celui-ci ne pouvant donc pas pénétrer dans l'eau, ne s'arrête point pour cela: mais il continue de se mouvoir au dehors. Dans ce cas si l'on décompose encore en deux la vitesse du mobile, l'une *horizontale* et l'autre *verticale*, on verra que celle-ci qui est fort peu de chose, à cause de la grande obliquité du mouvement, est promptement détruite par la résistance de l'eau; et

que l'autre qui est fort grande pour la même raison, ne pouvant éprouver de la part du liquide aucune diminution, demeure toute entière après le choc. Le mobile devrait donc continuer à se mouvoir, en *glissant* sur la surface de l'eau, qui est un corps sans élasticité. Mais il y a ici une circonstance particulière, qui indépendamment de l'élasticité du mobile, doit l'obliger de se relever après le choc, et de rebondir à la manière des corps élastiques. Les colonnes liquides qui sont immédiatement frappées par le mobile, s'abaissent nécessairement au-dessous de lui, quoique d'une quantité extrêmement petite, et les colonnes environnantes s'élèvent au même instant. Pour franchir la petite élévation qui se forme ainsi devant lui, le mobile est obligé de s'élancer de bas en haut; et ce mouvement joint à celui qu'il a conservé dans le sens horizontal, le porte en avant jusqu'à une distance plus ou moins grande. Le même effet peut se répéter plusieurs fois, selon la vitesse initiale communiquée au mobile. Telle est la manière dont se forment les *ricochets* des boulets de canon qui rencontrent la surface de l'eau dans une direction fort oblique, et ceux moins dangereux qui servent d'amusement aux enfans.

4. *Mouvement réfracté.*

Lorsqu'un mobile rencontre la surface de l'eau (fig. 11) dans une direction *perpendiculaire* à cette surface, sa vitesse par la résistance que lui oppose le liquide, résistance dont il sera question par la suite, éprouvera une diminution plus ou moins grande. Mais comme cette résistance est *directement* opposée au mouvement du mobile, et qu'elle se fait sentir de la

même manière tout autour de la droite que son centre décrit, il suit que sa direction ne sera point altérée, et que son mouvement dans l'eau se fera sur le *prolongement* de la même droite qu'il traçait avant de rencontrer le liquide.

Mais si le mobile pénètre dans l'eau suivant une direction *inclinée* à sa surface (fig. 12), alors des deux vitesses dont on peut le concevoir animé, l'une étant diminuée au moment de l'entrée par la résistance du liquide, tandis que l'autre demeure sans altération, il suit que la route du mobile dans l'eau ne peut pas être sur le prolongement de celle qu'il suivait dans l'air : mais elle lui sera inclinée, et s'approchera davantage de la *parallèle* à la surface du liquide. Il est visible que les parties du mobile qui éprouvent d'abord la résistance de l'eau, étant en plus grand nombre d'un côté de la *ligne du centre* que de l'autre, le mouvement du mobile déclinera de ce côté-ci; et si on élève une perpendiculaire sur la surface du liquide à l'endroit où le mobile vient le rencontrer, on reconnaîtra facilement que ce mobile doit en entrant dans l'eau, *s'éloigner* de cette perpendiculaire. Ce serait le contraire si le mobile sortait de l'eau pour entrer dans l'air. Le changement de direction qu'éprouve un mobile dans la circonstance que nous venons d'examiner, s'appelle *réfraction*, et son mouvement est dit alors *mouvement réfracté*. Ce mouvement devient un mouvement réfléchi, lorsque l'obliquité est fort grande.

CHAPITRE V.

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT PAR LE CHOC.

ON a considéré dans le Chapitre précédent les effets du choc, lorsque l'obstacle était *inébranlable*. Cherchons maintenant ce qui doit arriver lorsque cet obstacle est *mobile*, et peut céder à l'impulsion qu'il reçoit. Pour réduire les choses à l'état le plus simple, nous supposerons que le corps *choquant* et le corps *choqué* sont tous les deux de forme *sphérique*; et que le choc se fait suivant la droite qui unit les centres des deux sphères, ou en général qu'il se fait *perpendiculairement* aux surfaces, ce qui constitue le *choc direct*.

1. *Choc direct des Corps non-élastiques.*

Concevons d'abord deux corps sphériques, sans ressort, ayant *même* volume et *même* masse, dont l'un est en repos, et l'autre se meut avec une vitesse connue. La puissance quelle qu'elle soit, qui a communiqué cette vitesse à la masse en mouvement, ne pourrait, comme on a vu plus haut, faire prendre qu'une vitesse *moitié moindre* à une masse *double*. Or, cette puissance est, pour ainsi dire, renfermée dans la sphère en mouvement, qui ne peut par conséquent

faire plus qu'elle ne ferait elle-même, et qui est justement capable du *même* effet. Si donc cette sphère rencontre *directement* celle qui est en repos, comme elle ne peut continuer à se mouvoir sans entraîner celle-ci, elle l'entraînera en effet; et alors la masse en mouvement étant *double*, il est clair que la vitesse *commune* ne peut être que la *moitié* de celle qui animait le corps choquant. Celui-ci perdra donc par le choc une moitié de sa vitesse propre; et ce qu'il aura perdu, se retrouvera dans le corps qui était en repos, et que la rencontre de l'autre a tiré de cet état. Les deux sphères après le choc ne sont, pour ainsi dire, qu'un seul et même corps : elles vont ensemble avec la même vitesse, et comme ici aucune partie du mouvement ne peut être anéantie, il suit qu'on doit retrouver après le choc *la même quantité du mouvement* qui existait auparavant. C'est même là une *règle générale* toutes les fois qu'il n'y a point de mouvemens contraires, au moyen de laquelle il est facile de prévoir dans tous les cas ce qui doit résulter du choc de deux sphères, dont les masses et les vitesses sont connues.

Supposons donc que les deux masses qui étaient *égales* dans le cas précédent, sont maintenant *inégales*; et que celle de la sphère en repos n'est que la *moitié* de celle en mouvement. Comme la masse totale après le choc ne se sera accrue que d'*un tiers* de la totalité, la vitesse primitive n'éprouvera qu'une réduction d'*un tiers*, et les deux mobiles iront ensemble avec une vitesse commune égale aux *deux tiers* de celle qui animait la sphère choquante. Cette vitesse commune serait réduite au *tiers* de celle-ci, si la masse en repos était le *double* de celle qui est en mou-

vement ; par la raison que dans ce cas la masse totale mue après le choc, serait de *deux tiers* plus grande que celle qui était en mouvement auparavant.

Du principe établi tout à l'heure, qui veut que la quantité de mouvement soit après le choc *la même* qu'auparavant, on en conclut que toutes les fois qu'il est question du choc direct de deux corps, dont l'un est en repos, et qui sont tous deux privés de ressort, on obtiendra la vitesse commune après le choc, *en divisant la quantité de mouvement qui existait auparavant, par la somme des masses.* Telle est la méthode à suivre pour la solution de ces sortes de problèmes. (1)

Passons au cas où les deux mobiles sont tous les deux en mouvement dans le *même sens* ; mais avec des vitesses *différentes* : il est facile de ramener ce cas au précédent. En effet, si les deux corps étaient mus avec *la même* vitesse, il est évident qu'ils ne pourraient avoir aucune action l'un sur l'autre, et par conséquent que leur vitesse ne pourrait recevoir ni augmentation, ni diminution. D'ailleurs, leur distance et leur position mutuelles n'éprouvant aucune altération par l'effet de leur mouvement, on peut les considérer comme étant en repos l'un à l'égard de l'autre. Ce n'est donc qu'à raison de la *supériorité* de sa vitesse que l'un des deux mobiles peut avoir quelque action sur l'autre. Nous pouvons donc considérer celui-ci comme étant

(1) La formule pour le cas que l'on vient de considérer, est celle-ci : $u = \frac{MV}{M + M'}$; M est la masse du corps en mouvement, M′ est celle du corps en repos, V est la vitesse du premier, u est celle qu'ils ont tous deux après le choc.

en repos, et supposer que l'autre vient le choquer avec une vitesse égale seulement à la *différence* des deux vitesses. Cette différence se partagera donc entre eux suivant la loi établie ci-dessus, c'est-à-dire, en raison des masses. En ajoutant à la vitesse ainsi trouvée, celle dont on avait fait abstraction, on aura la vitesse *commune* qui les entraîne l'un et l'autre après le choc. (2)

Supposons, pour en donner un exemple, que la masse du corps choquant étant *un*, et sa vitesse *deux*, la masse du corps choqué soit *deux*, et sa vitesse *un*. On partagera d'abord l'excès *un* de la plus grande vitesse sur la plus petite, suivant la raison des masses, et il viendra *un tiers* pour la vitesse de l'une et de l'autre, résultante du choc. Ajoutant ensuite à cette vitesse *un tiers*, la plus petite vitesse, qui est égale à *un*, on aura enfin *un et un tiers* pour la vitesse réelle et commune des deux mobiles après le choc. Comme il ne doit encore rien se perdre ici, la quantité de mouvement existante après le choc sera la même que celle qui existait auparavant; et la vitesse commune aux deux mobiles *multipliée* par la somme de leurs masses, donne en effet le même produit, que les produits réunis de chaque masse *multipliée* par sa vitesse propre antérieurement au choc.

Reste le cas où les deux mobiles se meuvent en sens contraires, et viennent s'entrechoquer directement. Ici il y aura nécessairement quelque chose de perdu, car

---

(2) Pour ce cas la formule est : $u = \frac{MV + M'V'}{M + M'}$. Ces lettres indiquent ici les mêmes choses que tout à l'heure ; et cette formule devient la même que la précédente lorsqu'on fait V' égal à zéro, ce qui suppose la masse M' en repos.

les forces qui animent les deux mobiles, sont *opposées* entre elles, et doivent se nuire mutuellement. Si les quantités de mouvement de chaque mobile sont tout-à-fait *égales*, elles se détruiront l'une l'autre par leur opposition, et les deux mobiles seront réduits à l'état de repos. Si les quantités de mouvement sont *inégales*, on pourra considérer la plus grande des deux comme composée de deux parties, l'une égale à celle de l'autre mobile, et qui sera détruite par le choc en même temps que celle-ci, et l'autre qui doit subsister toute entière après la rencontre des deux mobiles : ce cas se ramène encore ainsi à celui où l'un des deux corps est en repos. On commencera donc par *supprimer* dans le mobile qui est animé d'une plus grande force, une portion égale à la force de l'autre mobile : on considèrera ensuite celui-ci comme étant en repos, et l'on distribuera entre les deux le mouvement restant, de manière qu'ils aillent tous deux dans le même sens et avec la même vitesse. (3)

Supposons donc l'une des masses égale à *deux*, et sa vitesse pareillement égale à *deux*, et faisons l'autre masse et l'autre vitesse toutes deux égales à *un*. Les quantités de mouvement, qui ne sont autre chose comme on se rappelle, que les produits respectifs des masses par les vitesses, seront ici dans le rapport de *quatre à un*. Maintenant les forces des deux mobiles étant opposées directement, il est clair que la

(3) Pour ce troisième cas on a : $u = \frac{MV - M'V'}{M + M'}$. Ainsi toutes les lois du choc direct des corps non-élastiques sont renfermées dans la formule générale : $u = \frac{MV \pm M'V'}{M + M'}$.

moindre force sera anéantie, et que le mobile en qui elle se trouve, sera d'abord réduit au repos. Il est clair aussi qu'une force égale sera pareillement détruite dans l'autre mobile; mais comme la masse de celui-ci est *double*, il ne perdra qu'*un demi* degré de sa vitesse. Il se trouvera donc dans le même cas, que s'il venait avec une vitesse exprimée par *trois demi*, et une masse exprimée par *deux*, choquer un corps en repos qui a *un* de masse. La règle établie ci-dessus nous apprend, que les deux mobiles après le choc iront ensemble avec une vitesse commune égale à *un*.

2. *Preuves de fait.*

On peut facilement vérifier par les faits les règles qu'on vient d'établir, concernant le choc des corps non-élastiques. On fait usage pour cela d'un appareil commode et simple, qui est dû au célèbre *Mariotte*, et qui en a pris le nom. Cet appareil consiste en un plan vertical, qui porte tout ce qui est nécessaire soit pour suspendre librement à de longs fils les corps que l'on veut mettre en expérience, soit pour mesurer la vitesse de leur mouvement avant et après le choc. Les deux mobiles (fig. 13), qui sont toujours de forme sphérique, sont d'abord disposés de manière qu'étant en repos, ils ne fassent que se toucher légèrement, et que leurs centres se trouvent sur une droite horizontale : le mode de suspension rend la chose facile. Pour les mettre en mouvement, il suffit de les élever à droite ou à gauche d'une certaine quantité, et de les abandonner ensuite à eux-mêmes. Ils tombent aussitôt avec une vitesse plus ou moins grande, dépendante de la hauteur où ils ont été éle-

vés, et décrivent en tombant des arcs de cercle à la manière des *pendules*. Des arcs semblables sont tracé sur l'appareil, et sont divisés en parties égales; ce qu sert à mesurer les vitesses, d'une manière imparfait à la vérité, mais suffisante pour l'objet qu'on se pro pose ici, surtout lorsque les mouvemens ont peu d'étendue.

Expériences. On prend donc, puisqu'il s'agit de corps non-élastiques, deux boules de terre molle qu'on a laissé sécher suffisamment, et que l'on sus pend comme on vient de dire, aux fils de l'appareil Si l'une des deux boules étant en repos, on élève l'au tre d'un certain nombre de degrés; celle-ci qui, par la vitesse qu'elle acquiert en tombant, se serait élévée du côté opposé du même nombre de degrés dans le cas où elle n'aurait rencontré aucun obstacle, trouvant en son chemin la boule en repos, ne peut continuer à se mouvoir sans l'entraîner avec elle; et alors la masse en mouvement se trouvant augmentée, il est éviden que la vitesse doit être diminuée d'autant, et que le deux mobiles réunis ne parviendront qu'à une hau teur proportionnellement plus petite. Ainsi les deu masses étant supposées *égales*, si l'on fait partir boule choquante de la *sixième* division, on trouve qu'après le choc les deux mobiles iront ensemble ju qu'à la *troisième* division de l'autre côté : ce qui s'a corde avec notre première règle.

On peut faire mouvoir les deux boules dans même sens, en les élévant toutes deux du même côté et les laissant tomber en même temps : dans ce cas l deux mobiles se choquent au moment où ils sont ar vés au point le plus bas, et le choc se fait avec l'ex

de vitesse qu'a celui qui est parti de plus haut. Si donc l'on fait tomber l'un des mobiles de la *troisième* division, et l'autre de la *sixième*, on trouvera qu'après s'être choqués au point le plus bas, ils remontent ensemble jusqu'à *quatre et demi*, comme l'exige la deuxième loi établie ci-dessus.

Enfin si l'on élève les deux sphères de côtés opposés, et qu'on les fasse tomber l'une contre l'autre de hauteurs différentes, celle de droite descendant, par exemple, du *sixième* degré, et celle de gauche du *troisième*; après s'être encore choquées au point le plus bas, les deux sphères iront ensemble vers la gauche, et parviendront jusqu'à *un et demi*, conformément à notre troisième règle.

En examinant les boules après le choc, on observera qu'elles se sont toutes les deux *également* aplaties à l'endroit du choc ; ce qui s'accorde avec la manière dont on a dit que le mouvement se communiquait, et en même temps avec le principe, que la réaction est égale à l'action. Au reste, on peut faire varier à volonté le rapport des masses, changer aussi celui des vitesses, et les résultats de l'expérience seront toujours assez d'accord avec ceux de la théorie. Voilà pour le choc des corps non-élastiques.

3. *Choc des corps élastiques.*

Cherchons maintenant ce qui doit arriver dans le choc des corps élastiques, et supposons pour plus de simplicité que leur élasticité est parfaite. Nous supposerons aussi que les corps qui se choquent, ont une forme sphérique, et que le choc est *direct*, ou qu'il se fait suivant la droite qui passe par les centres des

sphères. Ces suppositions établies, nous tirerons les lois qui concernent le cas présent, de celles que nous avons trouvées pour celui qui a précédé. En effet, la vertu élastique dont jouissent nos deux mobiles, et qui, après qu'ils se sont aplatis par le choc, leur rend leur forme première, cette vertu élastique peut être considérée comme un ressort placé entre les deux corps qu se choquent, lequel étant *comprimé* par l'effet du choc, doit se débander avec une force *égale*, et *réagir* de la même manière contre l'un et contre l'autre (*). L'élasticité les pousse donc tous deux en sens contraire : elle *ajoute*, par conséquent, au corps choqué une vitesse *égale* à celle que le choc lui a communiquée, et elle *ôte* au corps choquant *tout autant* que le choc lui avait fait perdre ; de façon que le résultat se trouve dans tous les cas, *en calculant d'abord comme si les corps étaient non-élastiques, et doublant ensuite l'effet du choc pour l'un et l'autre des deux corps.*

Les corps à ressort offrent une circonstance qui n'a point lieu pour les corps non-élastiques. Il peut arriver que la *soustraction* qu'il faut faire d'après ce qu'on vient de dire, pour avoir après le choc la vitesse du corps choquant, ne soit pas possible, parce que la quantité à retrancher est plus grande que celle qui restait. Alors on prend la quantité dont il s'en faut, et celle-ci ex-

(*) On fait voir en Physique que cela est ainsi, au moyen de deux anneaux de cuivre situés dans un même plan, et serrés l'un contre l'autre par un gros fil. A l'instant où le fil est coupé ou brûlé, on voit les deux anneaux se repousser mutuellement avec une force égale à celle qui les tenait comprimés.

prime bien la vitesse absolue de ce corps, mais qui se fait en *sens contraire* de son premier mouvement, c'est-à-dire que dans ce cas le corps choquant retourne en arrière après le choc avec la vitesse ainsi trouvée. Les exemples suivans serviront à éclaircir ceci.

Considérons d'abord le cas où les deux corps sont *égaux* en masse, et où l'un d'eux est en repos. Le choc seul, comme on a vu, communiquerait à celui-ci une vitesse égale à la *moitié* de la vitesse du corps choquant, et ce dernier perdrait aussi la *moitié* de sa vitesse propre. Or l'élasticité devant *doubler* l'effet du choc, c'est-à-dire, la perte de l'un et le gain de l'autre, il suit que le corps choquant sera réduit au repos, et que le corps choqué prendra toute la vitesse qu'avait celui-là. Ainsi il n'y aura non plus rien de perdu ici, et le mouvement aura passé *en totalité* de l'un de ces corps dans l'autre.

Si l'on suppose que les masses sont *inégales*, et que celle du corps en repos ne soit, par exemple, que la *moitié* de l'autre; la vitesse commune après le choc serait, ainsi qu'on a vu plus haut, les *deux tiers* de la vitesse primitive : le corps choqué aurait acquis une vitesse égale à *deux tiers*, et le corps choquant aurait perdu *un tiers* de la sienne. L'élasticité fera donc que la vitesse du premier sera de *quatre tiers*, et celle du second seulement d'*un tiers*, et la quantité de mouvement existante après le choc sera encore *la même* que celle qui existait avant, puisque les produits des deux masses par leurs vitesses respectives égalent ensemble le produit de la seule masse choquante par sa vitesse propre.

Enfin, si la masse en repos était le *double* de celle qui se meut; dans ce cas, comme on peut se le rappe-

ler, la vitesse commune serait réduite à *un tiers*. Le corps choqué aurait donc acquis une vitesse d'*un tiers*, que l'élasticité augmentera d'*autant*, et qui sera par conséquent égale à *deux tiers*. Quant au corps choquant, il aurait perdu par l'effet du choc les *deux tiers* de sa vitesse propre : l'élasticité doit lui en ôter encore autant. Sa perte réelle est donc de *quatre tiers* : c'est *un tiers* de plus qu'il n'a ; et cela veut dire, qu'après le choc non-seulement il cessera d'avancer dans le sens de son mouvement primitif, mais qu'il retournera en arrière avec une vitesse égale à *un tiers*. Ici la quantité absolue de mouvement après le choc est plus grande que celle qui existait auparavant : mais l'un des mouvemens se fait dans un sens opposé ; de façon qu'on retrouvera *l'égalité* qui avait lieu dans les autres cas, si l'on considère le mouvement *rétrograde* du corps choquant comme devant être soustrait du mouvement *direct* du corps choqué. (1)

Cherchons maintenant ce qui doit arriver lorsque les deux mobiles sont tous deux en mouvement, et dans le *même sens*. Il ne peut y avoir de choc ici,

---

(1) En appelant u la vitesse restante au corps choquant, et u' celle que prend le corps choqué, on a les formules pour le cas présent : $u' = \frac{2MV}{M+M'}$; et $u = \frac{V(M-M')}{M+M'}$. V est la vitesse du corps choquant avant le choc ; M et M' sont les masses des deux mobiles ; les lettres accentuées sont pour le corps choqué. Si $M = M'$, alors $u' = V$, et $u = 0$, ce qui fait voir que le corps choquant est réduit au repos. Si M est plus petit que M', u' est aussi plus petit que V, et la valeur de u devient *négative*, ce qui veut dire que dans ce cas, le corps choquant retourne en arrière.

qu'autant que le mobile *suivant* a plus de vitesse que celui qui *précède*. Pour trouver le résultat dans le cas présent, il faut, comme on a dit, soustraire d'abord la plus petite vitesse de la plus grande, considérer ensuite comme étant en repos le mobile à qui appartenait la première, et distribuer enfin entre les deux masses l'excès des deux vitesses. On a donc ainsi l'accroissement qu'aurait reçu la moindre vitesse, et la perte que la plus grande aurait éprouvée. L'élasticité *doublera* l'un et l'autre effet. Ainsi l'on aura la vitesse totale du corps choqué, en *ajoutant* à tout ce qu'il a acquis, la vitesse dont il jouissait avant le choc, et l'on trouvera celle qui reste au corps choquant, en *retranchant* de la vitesse qu'il avait au moment de la rencontre, tout ce que le choc et l'élasticité réunis lui ont fait perdre. Il arrivera encore ici que le corps choquant, ou continuera de se mouvoir suivant sa première direction, ou s'arrêtera subitement au moment du choc, ou retournera en arrière dans le sens contraire à son mouvement primitif : cela dépend comme précédemment du rapport des masses, et de plus de celui des vitesses.

Supposons, pour en donner un exemple, que les deux mobiles, soient de masses *égales*, et que leurs vitesses sont dans le rapport de *deux à un*. Cela étant, l'excès de vitesse *un* devant se partager *également* entre eux, l'un d'eux gagnerait *un demi* degré de vitesse, et l'autre perdrait *un demi* degré. Mais en ayant égard à l'élasticité, le corps choqué acquerra *un degré* tout entier, et le corps choquant en perdra tout autant : de façon que le premier aura après le choc *deux* degrés de vitesse, et le dernier *un* seulement. Il se sera donc

fait ainsi entre eux un échange de leurs vitesses antérieures. Si les masses sont *inégales*, on trouvera de la même manière ce qui doit résulter du choc pour l'un et pour l'autre; et en ayant égard à l'observation ci-dessus, on trouvera encore que la quantité de mouvement est *la même* avant et après le choc. (2)

Il nous reste à examiner le cas où les deux mobiles vont en *sens contraire*, et viennent se heurter l'un l'autre. On sait qu'il y a ici une *vitesse détruite* par le choc : mais cette vitesse doit être *restituée* par l'élasticité, et dans un sens opposé. Ainsi en calculant d'abord la perte de chacun des mobiles, et la *doublant*, pour la retrancher ensuite de leur vitesse primitive, on aura la vitesse qui doit leur rester, et le sens suivant lequel ils doivent se mouvoir.

Pour donner un exemple de ce cas, supposons que les deux mobiles viennent se choquer d'abord avec des masses et des vitesses *égales*. L'effet du choc, s'ils étaient sans ressort, serait de les réduire tous deux au repos : mais comme la force élastique doit leur rendre ce qu'ils ont perdu par leur rencontre mutuelle, ils rejailliront en sens contraire, et s'éloigneront l'un

---

(2) Les formules pour le cas que nous considérons ici, sont, en faisant usage des mêmes signes : $u' = \frac{2MV - V'(M - M')}{M + M'}$; et $u = \frac{2M'V' + V(M - M')}{M + M'}$. Ces formules se rameneraient aux précédentes en faisant V' égal à zéro ; ce qui serait supposer l'un des deux corps en repos. La valeur de u devient négative, et le corps choquant retourne en arrière, lorsque M étant plus petit que M', le produit $V(M - M')$ est plus grand que $2M'V'$.

de l'autre avec une vitesse *égale* à celle dont ils jouissaient au moment du choc. Chacun des deux mobiles dans ce cas est pour l'autre comme un obstacle invincible, et le mouvement devient ainsi un mouvement *réfléchi.*

Si les vitesses étant toujours *égales*, les masses sont dans le rapport de *deux à un*; la vitesse commune après le choc, toujours en supposant les corps non-élastiques, serait égale à *un tiers*, et les deux mobiles iraient *ensemble* dans le sens du mouvement de la plus grande des deux masses. Celle-ci aurait donc perdu les *deux tiers* de sa vitesse : en ayant égard à l'élasticité, sa perte totale sera de *quatre tiers*, c'est-à-dire, qu'elle retournera *en arrière* avec une vitesse de *un tiers.* Quant à l'autre masse, qui a déja perdu par le choc toute sa vitesse propre, et qui de plus serait par cette seule cause, forcée de rétrograder avec une vitesse égale à *un tiers*, elle perdra encore par la réaction élastique une quantité égale, et sa vitesse rétrograde sera de *cinq tiers.* Les deux mobiles s'éloigneront donc l'un de l'autre avec les vitesses qu'on vient de déterminer, et dont la somme est égale à celle des vitesses primitives.

Enfin si les masses étant *égales*, les vitesses se trouvaient dans le rapport de *deux à un*, le mouvement dans le cas de la non-élasticité, se ferait après le choc dans le sens de la plus grande vitesse, et avec une vitesse commune égale à *un demi.* Le mobile repoussé auroit donc perdu *trois demi* : en doublant à cause du ressort, on a *six demi,* ou *trois*, pour sa perte totale : donc il retournera en arrière avec une vitesse égale à *deux.* L'autre mobile aurait également perdu *trois*

demi, dont le *double* retranché de sa vitesse *deux*, donne *un* pour la vitesse avec laquelle il retournera pareillement en arrière. Ainsi les deux mobiles se seront mutuellement repoussés, et rétrograderont chacun de son côté, après avoir fait échange de leurs vitesses. (3)

On a observé que lorsque les deux mobiles vont dans le même sens, ou lorsque l'un d'eux est en repos, la quantité de mouvement après le choc était la *même* qu'avant le choc, au moins en ayant égard à la direction de ce mouvement, et regardant comme *soustractif* tout mouvement rétrograde. On exprime cette proposition en disant, que *la somme* des quantités de mouvement des deux mobiles *est la même* avant et après le choc. Mais lorsque les deux corps se meuvent en sens contraire, et viennent s'entre-choquer, c'est alors la *différence* des quantités de mouvement qui demeure la même avant et après, comme il est facile de s'en assurer, en faisant dans les masses et les vitesses des mobiles toutes les suppositions qu'on voudra. (4)

---

(3) Les formules pour ce troisième cas, sont : $u = \frac{V(M-M') - 2M'V'}{M+M'}$; et $u' = \frac{V'(M-M') + 2MV}{M+M'}$. Si les masses sont égales, la différence $M - M'$ est nulle, et le terme où cette différence est facteur s'évanouit ; de sorte qu'alors $u = V'$, et $u' = V$.

(4) On a dans les deux premiers cas : $MV + M'V' = Mu + M'u'$; et dans le dernier : $MV - M'V' = Mu - M'u'$. Cette dernière égalité qui a lieu lorsque les deux mobiles rétrogradent tous deux après le choc, se change en l'équation suivante : $MV - M'V' = Mu + M'u'$, lorsque les deux mobiles après le choc vont tous deux dans le même sens.

Une chose qui est particulière aux corps élastiques, c'est que *la somme des forces vives est la même dans tous les cas avant et après le choc.* On appelle ainsi le produit de chaque masse par le *quarré* de sa vitesse. Il est facile de vérifier cette proposition sur les divers exemples apportés ci-dessus. (5)

Ces lois du choc des corps à ressort peuvent également être confirmées par l'expérience, au moyen de l'appareil qu'on a fait connaître plus haut. A la place des boules de terre molle, on se sert de billes d'ivoire, que l'on fait choquer entre elles de la même manière. Mais ici l'on observe que les résultats fournis par l'expérience sont ordinairement *inférieurs* à ceux que donne le calcul. La raison en est que dans la théorie l'on suppose que le ressort est parfait, tandis que la nature ne nous offre que des corps dont l'élasticité est imparfaite, sous ce point de vue que leur rétablissement qui paraît néanmoins complet, ne se fait pas avec une force et une promptitude égale à la compression. Il suit de là que la vitesse communiquée par l'élasticité n'est pas tout-à-fait aussi grande qu'elle devrait être, et que les mobiles ne vont pas aussi loin que le calcul le demande. On pourrait ajouter que différens obstacles, que nous ferons bientôt connaître, empêchent toujours que les effets *physiques* ne soient parfaitement conformes aux résultats *théoriques*, dans les-

---

(5) On a ici : $MV^2 + M'V'^2 = Mu^2 + M'u'^2$. On peut vérifier cette égalité, en élevant au quarré les valeurs de u et de u' données ci-dessus, et multipliant par les masses respectives. Ce résultat s'appelle le principe *de la conservation des forces vives*.

quels on fait abstraction de ces inconvéniens. Ces obstacles ont ici plus d'influence à cause de l'étendue des mouvemens. Malgré cela l'on peut dire que l'expérience suivra d'assez près la théorie, pour qu'on soit convaincu, que la différence observée entre l'une et l'autre vient uniquement des causes qu'on a indiquées ici.

4. *Effets remarquables du choc des corps élastiques.*

Au sujet du choc *direct* des corps élastiques, nous avons deux choses curieuses à faire connaître ici.

Première expérience. On suspend à des fils et de la même manière, plusieurs billes d'ivoire d'une égale grosseur. On les dispose de façon qu'elles se touchent toutes légèrement, et que leurs centres se trouvent placés sur une droite horizontale. Les choses étant ainsi arrangées, si l'on élève la première de ces billes, et qu'on la laisse tomber sur la suivante, à l'instant même du choc on voit la dernière bille se détacher de la file, comme si elle avait été *immédiatement* frappée, et toutes les billes intermédiaires demeurent en repos et sans mouvement. Cependant elles ont toutes et *successivement* ressenti l'effet du choc : la forme sphérique a dû éprouver dans chacune d'elles de semblables altérations. Mais ces changemens et ces chocs quoique successifs se sont faits avec une si grande rapidité, que l'œil le plus attentif n'a pu apercevoir le moindre intervalle de temps entre le choc de la première bille, et le mouvement de la dernière. La promptitude avec laquelle le mouvement se transmet dans une série quelconque de corps élastiques, est une chose très-étonnante, et qui paraît difficile à concevoir ; mais l'effet

est indubitable ; et il est également certain que tous ces corps s'entre-choquent mutuellement, et les uns après les autres, jusqu'au dernier qui est le seul qui obéit au choc, parce qu'il est le seul qui soit libre.

Si au lieu d'une seule bille, on en élève *deux*, et qu'on les laisse tomber ensemble; on voit à l'instant même où elles choquent la bille suivante, les *deux* dernières billes de la file partir ensemble, et s'élever du côté opposé, tandis que toutes les billes interposées demeurent en repos. Cet effet s'explique comme le précédent. Des deux billes qu'on laisse tomber en même temps, la *précédente* s'arrête à l'instant du choc, et son mouvement passe successivement, et comme on vient de dire, jusqu'à la dernière bille qui part aussitôt. Mais au même instant où celle-là s'est arrêtée, la bille *subséquente* qui a encore toute sa vitesse, la choque à son tour, et son mouvement parvient ainsi et de la même manière jusqu'à l'avant-dernière bille, qui se détache des autres au même moment, et se meut d'un mouvement commun avec la dernière. Ici le nombre des chocs successifs est plus considérable, et la transmission du mouvement est également rapide. Si l'on élevait *trois* billes à la fois, et qu'on les laissât tomber ensemble sur les autres, les *trois* dernières billes se sépareraient de même des billes restantes qui demeureraient encore immobiles. La même chose a lieu quel que soit le nombre des billes que l'on élève, et qu'on laisse ensuite retomber.

En voyant *deux* ou *trois* billes se séparer des autres, lorsqu'on en laisse tomber *deux* ou *trois*, on pourrait penser que cela arrive ainsi, parce que la masse mise en mouvement étant *double* ou *triple*, il est nécessaire

que celle qui manifeste l'effet du choc, suive le même rapport. Mais on peut se convaincre aisément que ce n'est point là la cause de l'effet observé, en substituant à la dernière bille deux billes plus petites, et qui ne pèsent pas plus ensemble que celle-là. On verra alors que si le choc se fait par la seule première bille, il ne se détachera de la file qu'une seule de ces petites billes ; et qu'elles partiront toutes deux, lorsqu'il se fera par les deux premières : preuve que les *masses* ne sont ici pour rien, et que c'est le *nombre* seul qu'il faut considérer, ce qui s'accorde d'ailleurs avec l'explication du fait que l'on a donnée.

Deuxième expérience. Une autre expérience également curieuse est la suivante. On prend une suite de billes dont les masses forment une *progression géométrique*, dont chacune, par exemple, pèse *deux fois autant* que celle qui la suit ; et l'on observe que le mouvement communiqué par *la plus grande* masse à *la plus petite*, est plus considérable quand la communication est faite au moyen des masses intermédiaires, que lorsqu'elle se fait *immédiatement* par le choc de celle-là contre celle-ci. Supposons en effet trois billes seulement que je nomme A, B, C, et dont les masses sont exprimées par les nombres 4, 2 et 1. D'après les règles établies ci-dessus, la bille A dont la vitesse est *un*, doit communiquer à B qui est en repos, un vitesse égale à *quatre tiers*. La bille B qui jouit *virtuellement* de cette vitesse, en choquant la bille C pareillement en repos, lui fait prendre aussi les *quatre tiers* de sa vitesse propre, ce qui fait les *seize neuvièmes* de la vitesse de A. Telle est donc la vitesse de la

petite masse C, lorsque le mouvement lui est transmis par l'*intermédiaire* de la masse moyenne B. Mais si elle le reçoit par le choc *immédiat* de la masse A, sa vitesse n'est plus alors que les *huit cinquièmes* de celle de A, quantité plus petite que *seize neuvièmes.*

Si les masses des billes suivaient une autre loi, qu'elles fussent, par exemple, dans le rapport des nombres 4, 3 et 1 ; la bille B prendrait par le choc une vitesse virtuelle égale à *huit septièmes*, et la bille C de sa part, en acquerrait une effective égale à *douze septièmes.* Or cette fraction est encore plus grande que *huit cinquièmes*, qui sont le résultat du choc immédiat : mais elle est moindre que *seize neuvièmes* résultat obtenu lorsque le choc s'est fait par l'intermédiaire d'une masse égale à 2. On obtient un effet semblable, tant que la valeur de la masse B est comprise entre 4 et 1 : toujours la bille C prend plus de vitesse, lorsque le mouvement lui est transmis par la masse B, que lorsqu'elle est immédiatement choquée par celle A. Mais le *maximum* de l'effet a lieu, lorsque la masse de la bille B est une *moyenne proportionnelle géométrique* entre les deux masses extrêmes.

Si entre le premier et le dernier mobile, il s'en trouvait deux, ou un plus grand nombre, dont les masses iraient en décroissant, la vitesse acquise par le dernier, que je suppose le plus petit, serait encore plus grande que dans le cas précédent ; et surtout si toutes ces masses suivaient la loi d'*une progression géométrique décroissante.* Le mouvement transmis ainsi par une série de corps élastiques tels qu'on vient de les supposer, peut donc s'accélérer indéfiniment. L'effet est op-

posé, quand la transmission se fait dans le sens contraire. (1)

5. *Du choc oblique ou indirect.*

Dans tout ce qui a été dit jusqu'ici au sujet de la communication du mouvement par le choc, on a supposé que les corps avaient une forme sphérique, et que le choc se faisait suivant la droite qui unit leurs centres au moment du contact. Mais si en leur conservant la même forme, on suppose que la direction du choc ne passe point par le centre du corps sphérique, alors les résultats ne pourront plus être les mêmes, et il nous faut chercher ici ce qui doit arriver aux deux mobiles par le changement de cette circonstance. Or le seul principe de la *décomposition du mouvement* va nous fournir un moyen sûr et facile de trouver les directions et les vitesses des deux mobiles après leur rencontre. Remarquez que nous ne considérons ici que des corps

(1) Quelque singuliers que soient les résultats qu'on vient de faire connaître, on y trouvera néanmoins le principe de la *conservation des forces vives*. En effet examinons le premier cas, celui où les masses sont dans le rapport des nombres 4, 2, 1. La bille A après le choc conserve une vitesse *en avant* égale à *un tiers* : la bille B en retient de même, et dans le même sens une égale à *quatre neuvièmes*. Enfin la bille C prend, ainsi qu'on a dit, une vitesse de *seize neuvièmes*. Or si l'on multiplie chaque masse par le *quarré* de sa vitesse propre, on trouvera pour A, $\frac{4}{9}$ ou $\frac{36}{81}$; pour B, $\frac{32}{81}$; et enfin $\frac{256}{81}$ pour C, ce qui fait en tout *quatre unités*. Mais si l'on multiplie la masse A égale à 4 par le quarré de sa vitesse *un* avant le choc, on trouve pareillement 4. Ainsi la force vive est *la même* avant et après le choc.

sphériques d'un très-petit volume, et d'une densité uniforme; de façon que la résistance qu'ils opposent au mouvement par leur inertie, est censée résider toute entière dans leur centre.

Concevons donc que la bille A (fig. 14) vient choquer la bille B en repos, en suivant la direction A'*a*, qui passe à une certaine distance du centre de cette dernière. A cause de la grosseur des deux mobiles, c'est au point *d* de sa surface que la bille en repos sera frappée, et c'est au point central B que toute sa masse est comme réunie. La masse choquante étant pareillement concentrée en A, si l'on décompose sa vitesse A*a* en deux, l'une A*e* qui passe par le centre B de l'autre bille, et l'autre A*c* perpendiculaire à celle-là, ou parallèle à la *tangente* au point *d*, la première servira à exprimer la force et la direction du choc qu'éprouve le mobile en repos : il sera dans le même cas que s'il était frappé suivant AB avec une vitesse exprimée par A*e*. Quant à la force *Ac*, comme elle n'éprouve aucune résistance, elle subsistera toute entière après le choc, et servira à déterminer le mouvement ultérieur du corps choquant.

Si les deux mobiles sont dépourvus d'élasticité, on aura la *direction* de leurs mouvemens et leurs *vitesses*, en appliquant ici les règles établies plus haut. Les masses par exemple étant supposées *égales*, la boule B sera mue dans le sens BD avec une vitesse égale à la *moitié* de A*e*; et la boule A conservant la *moitié* de A*e*, et la vitesse A*c* toute entière, suivra la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites, et cette diagonale *Af* exprimera la vitesse et la direction de son mouvement.

Si les deux corps sont élastiques, le mouvement de la boule B se fera toujours dans le même sens BD, et avec toute la vitesse *Ae* dans le cas de l'égalité des masses; et la boule A ayant perdu toute sa vitesse dans ce sens, et ne conservant que celle parallèle à la tangente, s'échappera suivant la droite *Ac* avec une vitesse exprimée par cette même droite *Ac*.

L'effet dont il est ici question, et qui résulte du choc *oblique*, se rencontre souvent au jeu de billard. On veut par exemple, avec une bille placée en A', pousser dans la blouse D une bille placée en B. Ces trois choses n'étant point sur une même droite, il est évident qu'on ne peut en venir à bout par le choc *direct*. Il faut donc avoir recours au choc *oblique*, et déterminer sur la surface de la bille B le point où elle doit être frappée, pour obtenir l'effet desiré. Or si par la blouse D et par le centre de la bille B on mène une droite, le point *d* où elle rencontre la surface opposée, sera évidemment celui où doit se faire le choc. L'habileté consiste à trouver ce point par le simple coup d'œil, et à l'atteindre avec la bille choquante.

Lorsque les corps que l'on considère ont un volume sensible, toutes les molécules dont ils sont composés étant douées d'inertie, et le mouvement ne pouvant passer que successivement des unes aux autres, le choc oblique produit en outre dans les deux mobiles un mouvement autour de leurs centres, dont il sera question dans la suite.

Examinons encore le cas où les deux corps sont en mouvement dans des sens différens, et viennent à se heurter, de manière que le choc se fait dans une direction oblique quelconque, et qui s'écarte plus ou moins

de la droite qui unit leurs centres au moment de la rencontre. Lorsque l'on compare le mouvement de deux mobiles qui peuvent, ou doivent se rencontrer, on appelle *vitesse relative*, la quantité dont leurs centres s'approchent l'un de l'autre dans une unité de temps. Cette vitesse se trouve en déterminant pour deux instans différens la position des mobiles. Lorsque les mobiles se meuvent sur la même droite, la vitesse relative est égale à la *différence*, ou à la *somme* des vitesses absolues, selon que le mouvement se fait dans le *même* sens, ou dans des sens *contraires*. Si les mobiles suivent des routes différentes et inclinées l'une à l'autre, la vitesse relative est toujours plus petite que ce qu'on vient de dire : mais il est évident que dans tous les cas ils ne peuvent avoir d'action l'un sur l'autre qu'à raison de cette vitesse relative.

Soient maintenant les deux sphères A et B (fig. 15), toutes deux en mouvement, l'une suivant la droite EC, et l'autre suivant FD, et se rencontrant l'une l'autre en *t*. Si par ce point *t* on mène une droite tangente aux deux sphères, et qu'on décompose leurs vitesses absolues A*c*, B*d*, chacune en deux, l'une *perpendiculaire*, et l'autre *parallèle* à la tangente menée, on aura A*a* et B*b* pour les vitesses avec lesquelles se choquent les deux mobiles, et dont la *somme* constitue ici la vitesse *relative*. Les deux autres vitesses A*e* et B*g* étant parallèles entre elles, ne peuvent par l'effet du choc éprouver aucune altération, et devront après subsister toutes entières. Le cas est donc ici le même que si les sphères A et B venaient se heurter l'une l'autre avec les vitesses contraires A*a* et B*b*. Si les corps sont sans ressort et d'égale masse, il faudra retrancher la plus petite vitesse de la

plus grande, et donner à chacun la *moitié du reste.* Les deux mobiles auraient donc suivant la droite AB, et dans le sens de la plus grande vitesse, une vitesse commune A*l*, B*f*, qu'il faudrait combiner avec les vitesses A*e*, B*g* parallèles à la tangente, et que le choc n'a pu altérer. Construisant donc sur ces droites les parallélogrammes accoutumés, on aura A*i* et B*k* pour exprimer les directions et les vitesses des mobiles après le choc.

Lorsque les vitesses primitives sont telles, que les forces A*a*, B*b* se détruisent mutuellement, les deux sphères après le choc continuent à se mouvoir l'une et l'autre parallèlement à la tangente avec les vitesses restantes A*e* et B*g*.

Si l'on suppose que les deux mobiles sont doués d'élasticité, le ressort leur rendant en sens contraire tout ce que la *compression* leur avait fait perdre, il sera également facile de trouver le résultat du choc pour l'un et pour l'autre. Ainsi dans le cas de l'*égalité des masses*, la sphère B ayant perdu de sa vitesse B*b*, d'abord une quantité égale à A*a*, qui a été détruite, plus une portion A*l* qui a passé dans la masse A, elle en doit perdre encore *tout autant* par l'effet de l'élasticité, de sorte qu'elle acquerra réellement une vitesse *rétrograde* égale à B*p*. Celle-ci combinée avec la vitesse B*g* parallèle à la tangente, donnera B*r* pour la vitesse et la direction de la sphère B après le choc. De même la sphère A ayant d'abord perdu toute sa vitesse propre A*a*, et acquis dans le sens contraire la vitesse A*l*, doit en vertu du ressort prendre dans le même sens une nouvelle vitesse égale à *al*. Ainsi elle aura donc à la fois les deux vitesses A*n* et A*e*, et elle suivra par conséquent la diagonale A*o* avec une vitesse exprimée par cette même diagonale.

CHAPITRE VI.

DES OBSTACLES QUI S'OPPOSENT A LA CONSERVATION DU MOUVEMENT.

De lui-même le mouvement serait *perpétuel.* Un corps tiré de l'état de repos par une impulsion quelconque, devrait comme on a vu, se mouvoir *sans cesse*, en suivant toujours la *même droite*, et conservant fidellement la *même vitesse.* Cependant nous voyons tous les mouvemens produits ici bas, même les plus rapides, diminuer bientôt de vitesse, et cesser entièrement; de manière qu'un corps poussé par la plus grande force que nous puissions produire, revient néanmoins assez vite à l'état de repos. En s'en tenant à ce fait général, l'on pourrait donc penser que le repos est l'état *naturel* des corps, et que le mouvement est pour eux un état forcé, dont ils cherchent à sortir le plutôt possible, pour revenir à leur état primitif. Mais outre que l'*inertie* reconnue dans la matière ne nous permet pas de lui supposer aucune disposition plus favorable au repos qu'au mouvement, il nous est facile en voyant cesser tous les mouvemens qui se produisent sur notre globe, d'apercevoir les causes qui travaillent sans cesse à les affaiblir, et qui finissent toujours par les détruire.

Tous les corps terrestres mis en mouvement se meu-

vent de toute nécessité dans un espace rempli de *quelque fluide* plus ou moins grossier, dont il faut qu'ils écartent les molécules. Celles-ci comme matérielles et douées d'inertie, opposent de la résistance à leur déplacement, et ne peuvent céder au corps qui les pousse, sans lui dérober quelque portion de sa vitesse ; et comme cette perte va se répétant à chaque instant, il suit que le mobile est bientôt réduit au repos, à moins que la force qui l'a mis en mouvement, ne renouvelle de temps en temps ses impulsions.

D'un autre côté si le corps se meut sur un plan, ou autour d'un axe fixe, il aura de plus à vaincre la résistance d'un *frottement* sans cesse renaissant, résistance qui aurait bientôt à elle seule épuisé toute la vitesse qu'il a reçue. Enfin si le corps se meut *librement* au travers de l'air, outre la résistance qu'il trouve dans ce fluide, il est une autre cause qui contrarie constamment le mouvement qu'il a reçu : c'est la *pesanteur.* Celle-ci ramène toujours le mobile impérieusement vers la terre ; et c'est là lorsqu'il est libre, qu'au bout de quelques instans vient expirer toute la vitesse dont il était animé.

Les principaux obstacles à la conservation du mouvement sont donc la résistance des *milieux*, et la résistance du *frottement.* Quant à la *pesanteur*, c'est une force importante à laquelle tous les corps terrestres sont soumis, et que nous étudierons bientôt avec toute l'attention qu'elle mérite.

1. *Résistance des milieux.*

On donne en mécanique le nom de *milieu* à toute substance fluide ou solide dans laquelle il se fait un

mouvement. L'air est le milieu dans lequel nous vivons : l'eau est le milieu où se meuvent les poissons : le verre est un milieu par rapport à la lumière, qui paraît le traverser librement dans tous les sens. Les corps en mouvement éprouvant, comme on vient de dire, une résistance de la part du milieu dans lequel ils se meuvent, il nous faut chercher ici à connaître la grandeur de cet obstacle, et trouver de quelle manière, et suivant quelle loi se fait sentir cette résistance. Mais comme cette matière a été traitée avec assez de détails dans l'*Hydraulique physique*, je me contenterai d'en rappeler ici les principaux résultats.

Concevons un corps dont la surface antérieure est plane, et qui se meut dans un fluide *indéfini* suivant une direction perpendiculaire à cette surface. Le corps pour avancer, sera obligé de pousser les molécules du fluide qui lui répondent à chaque instant. Si l'on suppose que les différentes rangées de ces molécules s'échappent subitement, et les unes après les autres au moment où elles sont frappées, on voit que le mobile éprouvera à chaque pas une résistance, qui sera évidemment *proportionnelle* au nombre des molécules frappées, c'est-à-dire, *à la densité du fluide, et à l'étendue de la surface choquante.*

De plus, il est également évident qu'il faut avoir encore égard à la vitesse du mouvement : car le nombre des molécules rencontrées dans un temps donné, sera d'autant plus grand, que le mobile ira plus vîte ; et en outre la vitesse qu'elles prendront sera aussi d'autant plus grande. Il suit de là que le mouvement que perd le mobile, et par conséquent que la résistance que lui oppose le milieu *est doublement comme la*

vitesse, ou qu'elle est *comme le quarré de la vitesse.*

Telles sont les lois généralement admises concernant la résistance des milieux. On a fait connaître dans le traité d'*Hydraulique physique* les diverses expériences par lesquelles les Physiciens ont essayé d'en faire voir la vérité. On se dispensera donc de les rapporter de nouveau ici ; d'autant plus qu'elles ne sont pas capables de nous donner la juste mesure de cette espèce de force. Il est d'autres expériences qui ont été faites avec plus de soins, et en employant des moyens plus exacts et plus parfaits, lesquelles ont pleinement confirmé les lois établies ci-dessus, que le raisonnement seul nous a fait découvrir. Ainsi la résistance qu'un corps éprouve de la part du milieu qu'il traverse, est d'autant plus grande que la surface antérieure de ce corps est plus étendue, que son mouvement est plus rapide, et que le milieu a plus de densité. En diminuant la surface du mobile et sa vitesse, en raréfiant le milieu où il se meut, on diminue la perte qu'il éprouve à tout moment, mais on ne peut la réduire à zéro.

Quant à la valeur absolue de la résistance qu'opposent les milieux, on la trouvera dans l'ouvrage cité, et elle sera rappelée dans celui-ci à la Note (*d*). Il nous suffit d'avoir montré ici comment et combien cet obstacle s'oppose à la conservation du mouvement; et l'on conçoit en effet qu'il n'est aucune vitesse que cette résistance continuellement agissante ne soit capable d'anéantir en assez peu de temps.

On observera en terminant cet article, que la loi relative à la *densité*, n'est plus la même quand on compare des fluides de natures différentes, qu'on passe par exemple d'un fluide incompressible à un fluide

qui peut se comprimer, de l'eau à l'air. L'élasticité, comme on l'a vu, doublant l'effet du choc, il s'ensuit que la résistance d'un fluide élastique comparée à celle d'un fluide sans ressort, est proportionnellement plus grande qu'elle ne serait, si l'on n'avait égard qu'à la seule différence de densité; c'est au moins ce que l'expérience paraît avoir prouvé dans bien des cas.

Puisque la résistance des milieux augmente comme le quarré de la vitesse, on conçoit qu'un corps qui tombe d'une grande hauteur, et dont la vitesse, ainsi qu'on verra, s'accélère continuellement par l'action de la pesanteur, rencontrant dans l'air qu'il traverse, une résistance qui croît en plus grande proportion, doit enfin arriver plutôt ou plus tard à un mouvement *uniforme*; comme on le voit pour les corps qui descendent ainsi, armés d'un *parachute*.

2. *Résistance du frottement.*

Avec quelque soin qu'une surface ait été polie, elle n'en est pas moins remplie d'inégalités: la grande quantité de *pores* on *interstices* qui existent entre les parties solides de tous les corps, est cause que leurs surfaces, même celles qui ont été travaillées avec le plus d'attention, sont criblées d'un nombre infini de petites cavités séparées par de petites hauteurs, qui sont les parties *solides et superficielles* des corps. Ces inégalités sont plus profondes et plus sensibles dans les surfaces qui n'ont pas été polies. Il suit de là que lorsque deux corps sont posés l'un sur l'autre, les parties *saillantes* de leurs surfaces s'engagent mutuellement dans les parties *creuses*, à-peu-prés, suivant la comparaison de l'abbé *Nollet*, comme lorsqu'une pelotte de velours repose sur un tapis de la même étoffe.

Maintenant si l'on suppose que l'un de ces corps est mis en mouvement, et doit *glisser* sur l'autre, il est clair qu'il faudra que ses aspérités se dégagent des cavités où elles sont logées, et qu'il doit en être de même de celles de l'autre corps. Or cela ne peut se faire qu'en *rompant* les parties saillantes, ou en les *faisant fléchir*, ou enfin en *soulevant* le mobile pour les lui faire franchir. Ces divers moyens ont lieu en même temps, c'est-à-dire, que quelques inégalités sont rompues, que d'autres fléchissent, et que le mobile pour franchir celles qui résistent davantage, est forcé de s'élever, et d'avancer comme par bonds. Une partie de sa force est donc employée à produire ces divers effets, et par conséquent le frottement est une véritable résistance qui doit épuiser bientôt le mouvement le plus rapide.

Le dégagement des inégalités des deux surfaces peut encore se faire d'une autre manière. Le corps en mouvement, lorsque sa forme le permet, peut *tourner* sur ses points d'appui, et en présentant de nouvelles parties de sa surface, les dégager ainsi les unes après les autres. Mais comme il ne prend ce mouvement de *rotation* qu'à cause des obstacles que lui opposent les aspérités de la surface sur laquelle il se meut, il est visible que cette résistance lui dérobera encore à chaque instant une portion de vitesse, et que tout le mouvement du mobile sera de même épuisé au bout de quelque temps. Ce temps à la vérité sera plus long que dans le premier cas ; parce que la dépense de force nécessaire pour faire rouler un corps, est beaucoup moindre que celle qu'il faut pour rompre, plier, ou surmonter les inégalités des surfaces frottantes.

3. *Considérations physiques sur la résistance du frottement.*

On distingue deux espèces de frottement : on appelle *frottement de la première espèce*, celui où les *mêmes* parties d'un corps parcourent successivement différentes parties d'un autre corps. Le frottement est dit de la *seconde espèce*, lorsque *différentes* parties du mobile s'appliquent les unes après les autres sur différens points de la surface où il se meut. On rend très-sensible la grande différence qu'il y a entre ces deux sortes de frottement, au moyen d'une roue dentée et d'un rateau dont les dents ont entre elles l'écartement convenable. Il est facile de faire avancer la roue sur le rateau, lorsqu'elle a la liberté de tourner sur elle-même : mais si de quelque manière on l'empêche de se mouvoir sur son axe, alors pour la faire avancer, il faut ou rompre les dents de la roue, ou la soulever, ce qui exige évidemment l'emploi d'une force plus considérable.

On peut comparer d'une manière plus exacte les deux espèces de frottement, en se servant d'un appareil décrit par l'abbé *Nollet*, et qu'on appelle la *machine des frottemens*. Cet appareil est composé d'une roue de métal traversée par un axe, dont les extrémités peuvent reposer dans deux trous destinés à les recevoir, où être supportées par les intersections de deux paires de petits rouleaux mobiles sur leurs axes. La roue est mise en mouvement par le moyen d'un ressort en spirale, que l'on peut tendre plus ou moins, et qui étant lâché, fait des *oscillations* dont le nombre dépend de la résistance plus ou moins grande que lui oppose le frottement qui se fait contre l'axe de la roue.

Maintenant si cet axe étant *d'abord* posé dans les

trous percés pour le recevoir, et *ensuite* porté par la circonférence des petits rouleaux, qu'on appelle *roues de friction*, on fait *osciller* le ressort, après l'avoir à chaque fois tendu au même degré, et que l'on compte le nombre des vibrations dans les deux cas, on trouvera que ce nombre est *dix à douze fois plus grand* dans la dernière circonstance que dans la première. Or dans celle-là la circonférence de l'axe s'applique sur la circonférence des rouleaux, ce qui fait un frottement de *la seconde espèce;* et dans l'autre au contraire le même axe en tournant frotte contre les *mêmes* parties des cavités qui le reçoivent, ce qui constitue un frottement de *la première espèce.* L'expérience ne laisse donc aucun doute sur la grande différence qui existe entre ces deux espèces de frottement, et sur le grand avantage qu'il y a d'employer le dernier, soit pour la conservation du mouvement, soit pour celle des machines.

La seconde sorte de frottement étant beaucoup moins nuisible au mouvement que la première, il est facile de voir pourquoi, lorsqu'on veut faciliter le jeu des pièces qui doivent se mouvoir les unes sur les autres, on a soin de les enduire d'huile, de graisse, de savon, dont les parties globuleuses changent la nature du frottement, outre qu'elles servent à remplir les inégalités des surfaces. On voit encore pourquoi lorsqu'il s'agit de mouvoir de lourds fardeaux, on est dans l'usage de poser dessous des rouleaux de bois sur lesquels on les fait avancer; et pourquoi enfin quand on veut ralentir la vitesse d'une voiture qui descend par une pente trop rapide, on a l'attention de fixer les roues, et de les empêcher de tourner sur elles-mêmes : ce qui s'appelle *enrayer*, et change la nature du frottement.

Æstimation de la résistance du frottement.

.près ces considérations générales sur la nature du tement, et sur l'espèce de résistance qu'il oppose mouvement, il convient de faire connaître ce que ı sait sur la valeur absolue de cette résistance, et les s qu'elle suit.

Le frottement dépendant de la nature des corps, de ır dureté, du poli des surfaces, et de plusieurs autres constances physiques qui peuvent varier à l'infini, ne sont soumises à aucune règle, nous ne parlerons int ici de ces circonstances variables, et nous ob-verons seulement, que la grandeur de la résistance i dépend de ces diverses causes, doit dans chaque cas rticulier être déterminée par des expériences directes.

qui paraît le plus constant à ce sujet, c'est que le ttement est généralement plus nuisible, lorsque des ps de *même matière* frottent les uns sur les autres; s doute parce que les inégalités de leurs surfaces nt semblablement arrangées, pénètrent plus avant, en plus grand nombre les unes dans les autres. On contentera donc d'examiner les circonstances sur quelles il est possible d'établir quelque chose.

Cherchons d'abord quel est le *rapport du frottement c l'étendue de la surface frottante.* Il semble, au mier coup d'œil, que cette résistance doit être en ;on des surfaces. Plus celles-ci sont grandes, plus il des parties engagées dans le même temps, et plus si il faudra faire d'effort pour les dégager. Cependant périence ne dit pas cela à beaucoup près : il a paru me que le frottement demeurait à peu près le me, soit qu'un corps donné fût traîné sur sa plus

large surfaoe, soit qu'il glissât sur sa surface la plus étroite. Dans le premier cas il y a sans doute *plus* de parties engagées, mais elles le sont *moins* profondément, parce que le poids du corps repose sur un plus grand nombre de points : dans le second au contraire, le nombre des parties engagées est *plus petit*, mais elles pénètrent *plus avant* les unes dans les autres ; de façon que l'effort qu'il faut faire dans les deux cas pour les dégager, et mouvoir le corps, se trouve être à peu près le même.

Ceci néanmoins doit être renfermé dans de certaines limites ; et l'on trouve en se servant de l'appareil décrit ci-dessus, que la résistance du frottement, si elle n'est pas proportionnelle à l'étendue des surfaces, *augmente* néanmoins lorsque les surfaces deviennent *plus grandes*, tout le reste demeurant le même. Il est d'ailleurs visible que, la quantité dont les parties superficielles des corps peuvent céder étant nécessairement limitée, il ne peut pas se faire qu'elles cèdent et s'engagent d'autant plus, que le nombre des points de contact est plus petit. Le frottement doit donc diminuer à mesure qu'il se fait contre des surfaces d'une moindre étendue. Aussi les mécaniciens et les horlogers surtout, ont-ils soin de diminuer autant qu'ils le peuvent, l'étendue des surfaces qui doivent frotter les unes sur les autres (*). Il faut cependant ici excepter le cas où le mobile serait traîné sur une *arête*, ou sur une *pointe* : car alors il en-

(*) L'avantage que l'on trouve à diminuer autant qu'il se peut, la grosseur des axes et des pivots, vient plutôt de ce que la résistance du frottement se fait par ce moyen à une moindre distance de l'*axe* du mouvement.

tamerait le corps sur lequel il se meut, et y creuserait un sillon, ce qui augmenterait beaucoup la résistance qu'il éprouve dans son mouvement.

Si l'étendue des surfaces a quelque influence sur la grandeur du frottement, il semble que cette espèce de résistance doit avoir aussi quelque rapport avec la vitesse du mobile. En effet le nombre de parties engagées dans un tems donné, et la quantité dont elles peuvent l'être, dépendent visiblement de cette vitesse, lorsque tout le reste demeure le même. Quand le mouvement est plus lent, les inégalités des surfaces ont plus de temps pour s'enfoncer les unes dans les autres, et il devient plus difficile de les séparer. C'est pour cette raison que lorsque les surfaces ont demeuré quelque temps en contact entre elles, il en coûte plus d'effort pour *commencer* le mouvement, que pour l'*entretenir* une fois qu'il est commencé. A mesure donc que la vitesse du mobile devient plus grande, les inégalités des surfaces s'engagent moins profondément sans doute, mais il faut aussi que dans le même temps, le mobile rompe ou surmonte un plus grand nombre d'aspérités; de façon qu'il s'établit ici une espèce de compensation, et que la résistance du frottement demeure à peu près la même pour tous les degrés de vitesse moyenne : du moins l'expérience n'a fait apercevoir dans ce cas que des différences peu sensibles.

Lorsque le mobile avance en tournant sur lui-même, le frottement consiste dans une espèce de choc des aspérités des deux surfaces les unes contre les autres. Ce frottement devrait donc augmenter avec la vitesse : mais aussi quand la vitesse devient plus grande, les aspérités moins engagées ne font presque plus que

tance du frottement et celle des milieux, nous présenterons de nouveau la réflexion que nous avons déjà faite, que ces résistances se faisant continuellement sentir, soit à la surface du mobile ; soit, s'il est suspendu, aux points de suspension ; soit, s'il tourne sur lui-même, autour de l'axe de révolution ; soit enfin dans le fluide au travers duquel il se meut ; il n'est point de mouvement produit ici-bas par une impulsion quelconque, qui puisse conserver son uniformité, et qui n'éprouve à chaque instant une diminution toujours croissante, par laquelle il doit enfin être anéanti plutôt ou plus tard. Pour que le mouvement d'un corps pût persévérer dans le *même état*, malgré la résistance du milieu où il se fait, et malgré celle du frottement, il faudrait qu'une force quelconque fût occupée à réparer sans cesse les pertes que fait continuellement le mobile par ces deux causes ; et comme ces pertes varient d'une infinité de manières, il faudrait que la force *réparatrice* suivît elle-même toutes ces variations, et que de plus elle fût *inépuisable :* ce qui ne se peut évidemment pas.

On a dans l'*élasticité* une force qui peut entretenir pendant quelque temps le mouvement d'un corps ; et l'on a imaginé des moyens accessoires pour maintenir l'uniformité de ce mouvement, comme on le voit dans les montres et les pendules. Mais le ressort en agissant, se développe, et son action cesse sitôt qu'il est entièrement déployé. Or il n'existe, et ne peut exister dans la nature, aucun moyen pour qu'il puisse se remonter tout seul, ou pour prolonger indéfiniment la durée de son développement. Donc le mouvement produit par l'action d'un ressort, agissant comme on vient de dire,

doit aussi s'épuiser plus ou moins vîte. Si le ressort est disposé de manière à faire tout seul des *oscillations* autour d'un point fixe, l'imperfection de l'élasticité, la résistance de l'air, et le choc ou le frottement des molécules les unes contre les autres, auront bientôt mis un terme à ses oscillations, et le feront rentrer promptement dans l'état de repos.

La *pesanteur* est encore une force mécanique capable de produire du mouvement. On peut, soit en ralentissant la chute d'un corps, soit en balançant la pesanteur d'un corps par celle d'un autre corps, soit en laissant agir cette force et la contrariant tour-à-tour par elle-même, prolonger la durée de ce mouvement. Mais enfin il ne pourra jamais subsister que pour un certain temps, et il s'anéantira bientôt par la raison que cette force ne peut jamais produire, à cause des obstacles, qu'une force inférieure à elle-même; qu'elle va donc ainsi en décroissant à chaque instant, et qu'il est par conséquent nécessaire qu'elle s'épuise tout-à-fait en assez peu de temps.

Il suit des réflexions qu'on vient de présenter, et qui seront confirmées par tout ce que nous verrons dans la suite, que toutes les machines qui sont de temps en temps annoncées au public comme donnant la solution du problème *du mouvement perpétuel*, ne sont qu'un pur *charlatanisme* (*). Des hommes ignorans et de mauvaise foi, en employant quelque artifice secret, parviennent quelquefois à tromper les gens inattentifs, ou peu instruits. Mais leur triomphe ne dure pas long-temps, et le premier regard de l'homme éclairé suffit pour

(*) Voyez la Note (*c*).

faire évanouir ces prétendues inventions. Un mouvement *permanent et sans fin* produit par des forces mécaniques, est donc une chimère qui ne peut séduire que l'ignorance et la crédulité. (*)

6. *De quelques mouvemens qui sont dus au frottement.*

On a déjà remarqué plus haut, que lorsque deux corps sphériques viennent à se choquer obliquement, outre le mouvement de progression qui résulte du choc pour l'un et pour l'autre, ils devaient prendre tous deux un mouvement autour de leur centre, à cause du temps nécessaire pour la transmission du mouvement. Mais le frottement qui a lieu dans les points de contact est encore une raison qui les oblige à tourner sur eux-mêmes. En effet soit une sphère frappée suivant une direction qui ne passe pas par son centre. Nous avons dans

(*) Ce que nous disons ici des forces *mécaniques* est incontestable et démontré. Mais il existe aussi des forces *chimiques* et *physiques*, dont la nature et la manière d'agir nous sont moins bien connues. Celles-ci sont de nulle considération dans la mécanique : ce qui n'empêche pas qu'elles ne puissent produire de petits mouvemens plus ou moins durables. Un Physicien de *Vérone* en 1815, M. *Zamboni*, a imaginé un appareil galvanique, au moyen duquel un petit levier très-mobile sur son axe, peut se balancer alternativement à droite et à gauche pendant un temps fort long. Il y a tel de ces appareils où ce mouvement alternatif existe, dit-on, depuis plusieurs années. Mais il paraît que la cause qui produit ce mouvement s'épuise enfin, et le balancier est ramené à l'état de repos plutôt ou plus tard.

la décomposition du choc trouvé une force parallèle à la tangente menée par le point de contact. Celle-ci ne ferait que glisser sur la surface du mobile, si cette surface était parfaitement unie : mais les aspérités dont elle est toujours hérissée, sont cause qu'il est entraîné par cette force, et qu'il prend ainsi un mouvement de *rotation* autour de son centre, en même temps qu'il obéit à l'impulsion par son mouvement *progressif*.

Le frottement est pareillement cause qu'une bille d'ivoire posée sur un billard, lorsqu'elle est frappée horizontalement et par son centre, *tourne sur elle-même* à mesure qu'elle avance. Sur un plan parfaitement uni, et sans frottement, la bille frappée devrait se mouvoir en glissant toujours sur le même point de sa surface : mais le frottement que ce point éprouve contre le tapis, et qui l'empêche de se mouvoir avec la même vitesse que les autres points de la bille, est cause qu'il reste en arrière, et que la bille en avançant tourne sur elle-même dans le sens vertical, et suivant la direction de son mouvement progressif.

Lorsqu'une bille qui est ainsi en mouvement sur un billard, vient à rencontrer *directement* une autre bille de même grosseur, et en repos, elle doit, comme on sait, communiquer toute sa vitesse à celle-ci, et s'arrêter elle-même tout-à-coup. Cependant il arrive communément que la bille choquante continue d'avancer encore d'une certaine quantité, et cet effet est dû au frottement qu'elle éprouve contre le tapis. En effet cette bille, ainsi qu'on vient de dire, a deux mouvemens à la fois, un mouvement de *progression* dans le sens où elle a été poussée, et un mouvement de *rotation* autour d'un diamètre horizontal *perpendiculaire* à la direction du

mouvement progressif. Au moment où elle frappe la bille en repos, elle lui transmet toute sa vitesse en avant, et cesse par conséquent d'avancer elle-même. Mais son mouvement de rotation n'est pas anéanti pour cela, et la bille doit après le choc, continuer de tourner sur elle-même. Si dans l'instant où se fait le choc, le billard pouvait s'anéantir tout-à-coup, et que la bille choquante demeurât suspendue dans l'espace, on la verrait tourner sur son centre et en avant, sans sortir de la place où le choc s'est effectué. Mais comme ce mouvement de rotation se passe sur un plan résistant, il faut bien que la bille continue d'avancer jusqu'à ce que ce mouvement soit entièrement éteint.

Un autre effet remarquable, très-connu au billard, et qui est encore dû au frottement, c'est le mouvement *rétrograde* d'une bille, qui est frappée par le tranchant de la main suivant une direction qui passe en deçà du centre de la bille. En décomposant ce choc comme nous avons toujours fait (fig. 16), on voit qu'une partie de la force est employée à chasser la bille en avant, et une autre à la faire tourner sur elle-même. Or il arrive, lorsque le choc a passé assez loin du centre, que le mouvement progressif est bientôt détruit par la résistance du tapis, et que le mouvement de rotation qui se fait ici dans un sens contraire, persévérant plus long-temps, ramène la bille vers le point d'où elle était partie, et la fait même passer au delà de ce point. (1)

---

(1) Dans la figure, PQ est la direction du choc ; Q*b* est la partie du choc qui produit le mouvement progressif vers M, en se décomposant ; Q*c* est celle qui produit le mouvement de rotation dans le sens QBG. C'est ce dernier mouvement qui ramène la bille vers N, lorsque le mouvement progressif est épuisé.

On a considéré ici le frottement comme un obstacle au mouvement : on traitera par la suite de cette espèce de résistance considérée dans les machines.

CHAPITRE VII.

DE LA PESANTEUR.

LA *pesanteur* est une force que l'on trouve dans tous les corps terrestres, et qui semble appartenir à chacun d'eux en différens degrés. *Tous les corps sont pesans*, c'est-à-dire qu'ils ont tous, et dans toutes les circonstances, *une tendance à tomber*, tendance à laquelle ils obéissent, dès qu'ils en ont la liberté. Cette disposition inhérente aux corps terrestres tels qu'ils sont, ne leur est pas néanmoins *essentielle*, et l'on conçoit qu'ils pourraient en être privés, sans cesser d'exister. Mais ce n'en est pas moins une propriété fort importante, qui convient à tous, et qui contribue infiniment à la conservation de l'ordre qui règne ici-bas. Pour ne rien omettre de ce qui concerne la pesanteur, nous chercherons d'abord quel est le sens suivant lequel cette force se fait sentir. Nous examinerons ensuite si elle existe en effet dans tous les corps, si elle y est au même degré, si elle varie dans les corps différens. On s'occupera après cela d'en déterminer la nature et la cause; et l'on fera enfin connaître sa manière d'agir dans les corps qui lui obéissent librement.

1. *Direction de la pesanteur.*

Il est connu de tout le monde, que la tendance des corps à *tomber*, comme on dit, est dirigée vers la terre, et se fait sentir de *haut en bas.* Mais pour avoir avec plus d'exactitude sa véritable direction, il faut prendre un corps pesant, une balle de plomb par exemple, et la laisser simplement tomber d'une hauteur quelconque. On remarquera qu'elle décrit dans sa chute une *ligne droite*, et qu'elle viendra se placer directement *au-dessous* du point d'où elle est partie. Il sera encore mieux de suspendre la balle à un point fixe au moyen d'un fil; et lorsqu'après quelques balancemens elle sera arrêtée et en repos, la ligne que tracera alors le fil, indiquera parfaitement la direction de la pesanteur. Si l'on rapporte cette droite à la surface de la terre, on remarquera qu'elle lui est *perpendiculaire.* Ainsi la pesanteur agit *perpendiculairement* à la surface du globe: c'est dans ce sens-là seulement qu'elle sollicite les corps.

Une droite perpendiculaire à la surface terrestre s'appelle une *verticale :* c'est donc suivant des droites verticales que tombent les corps, lorsqu'ils ne sont pas soutenus. Ces droites si la terre était parfaitement ronde, iraient toutes concourir au centre du globe : mais comme la forme de la terre s'écarte un peu de la forme sphérique, les perpendiculaires à la surface passeront plus ou moins près du centre. Cependant la différence est assez peu considérable ; et pour notre objet présent nous pouvons n'y avoir aucun égard, et considérer les directions de la pesanteur sur les différentes parties du globe, comme allant se réunir à son centre. Si l'on

compare ces directions dans un même lieu, et dans des points qui soient peu éloignés entre eux, on pourra les regarder comme *parallèles*, à cause que le rayon terrestre est comme *infini* relativement à la distance qui sépare les points que l'on considère. L'angle que ces droites forment dans ce cas au centre de la terre, est si petit, qu'on peut le supposer nul sans erreur sensible.

La véritable direction de la pesanteur étant parfaitement connue, on pourra annuler la pesanteur d'un corps de deux manières, ou en le plaçant *verticalement* au-dessous d'un point fixe qui en soutienne le poids, ou en le posant sur un plan *tangent* à la surface de la terre, que l'on appelle un plan *horizontal*. Dans ces deux cas le corps, comme il est évident, ne peut point obéir à sa pesanteur, la résistance du point fixe dans l'un, et celle du plan dans l'autre lui étant directement opposées. On voit aussi par-là combien il importe pour qu'un mur ait la solidité convenable, que toutes ses parties soient disposées dans un plan bien *vertical*, et qu'il soit d'*à plomb*, comme disent les ouvriers, qui se servent en effet d'un plomb suspendu à un gros fil, pour en reconnaître et régler la position.

2. *Généralité de la pesanteur.*

Tous les corps terrestres sont-ils pesans? trouve-t-on dans tous cette tendance à tomber qui constitue la pesanteur? On pourrait avoir quelque doute à ce sujet, quand on voit certaines substances prendre, lorsqu'elles sont libres, une direction contraire à celle des corps qui tombent, et s'éloigner de la terre en s'élevant. La fumée qui précède, suit et accompagne la combustion,

perdre de son poids. Le défaut de pesanteur de toutes ces substances vient sans doute de leur extrême subtilité, qui ne permet pas d'en réunir une quantité dont le poids soit sensible, et peut-être aussi de ce que la *force de répulsion* que l'on remarque entre leurs molécules, suffit pour contre-balancer l'effet de la pesanteur. Quoi qu'il en soit, ces substances exceptées, la tendance vers la terre est une propriété qui se trouve dans tous les corps, et jusque dans leurs plus petites molécules. Elle produit en eux ce que l'on appelle *le poids*, qui est la grandeur de l'effort que fait un corps pour obéir à cette tendance.

3. *La pesanteur est la même dans tous les corps.*

Cette propriété que nous venons de reconnaître dans tous les corps, comparons-la avec elle-même, et voyons s'il y a entre eux quelque différence à cet égard. Si l'on s'en tient à un premier aperçu, il semble d'abord que cette propriété est susceptible *de plus* et *de moins*, et par conséquent qu'elle diffère dans les différens corps. Lorsque l'on compare des masses *inégales* de *la même* matière, comme leurs *poids* sont *inégaux*, on est porté à croire que leurs *pesanteurs* sont aussi différentes. Mais si l'on fait attention que la pesanteur est une simple tendance en bas, et que cette tendance appartient à toutes les particules des corps, on pourra déjà entrevoir que la différence des *poids* n'indique pas nécessairement une différence dans la *pesanteur*, comme la nécessité d'employer plus ou moins de force pour faire prendre à différens corps le même degré de vitesse, ne prouve point qu'il y ait aucune différence dans leur inertie.

Pour comparer donc la pesanteur des corps, ce n'est pas *leurs poids* qu'il faut comparer, mais *la vitesse* avec laquelle ils tombent et s'approchent de la terre, lorsqu'ils sont libres de suivre leur penchant. Or si on laisse tomber *à la fois* et d'*une même hauteur* deux balles de plomb, l'une pesant *une once* et l'autre pesant *une livre*, on remarquera qu'elles arrivent en bas toutes les deux *en même temps ;* d'où l'on sera forcé de conclure, que la pesanteur de ces deux balles, ou leur tendance vers la terre est exactement *la même*, malgré la différence de leurs poids. Le poids résulte bien de la pesanteur : c'est l'effort que fait un corps pour obéir à cette tendance. Il est proportionnel à la masse ; et la pesanteur en est tout-à-fait indépendante. Si l'on conçoit par la pensée la masse d'une livre partagée en *seize* parties égales, chacune de ces parties sera animée de la même pesanteur, et ainsi séparées elles tomberont toutes avec une égale vitesse. Qu'on les réunisse de nouveau en une seule masse, et leur chute se fera encore dans le *même temps.* La pesanteur y sera maintenant, si l'on veut, *seize fois* plus grande : mais la masse à mouvoir ayant augmenté dans la même proportion, le résultat doit demeurer le même. La pesanteur est donc *la même* dans tous les corps d'une même matière, quelle que soit leur masse. Voyons si la chose a également lieu pour les corps d'espèces différentes.

Pour pouvoir résoudre cette question, il faut encore chercher s'il y a quelque différence dans la vitesse que la pesanteur fait prendre à des corps de diverse nature qui sont libres de lui obéir. Or on trouvera que les apparences ont encore ici quelque chose de trompeur. Faites tomber d'une *égale* hauteur des corps très-

lourds, et des corps très-légers, et vous remarquerez des différences très-sensibles dans la durée de leurs chutes : ce qui semblera indiquer une grande inégalité dans leurs pesanteurs.

Galilée et ensuite *Neuton* ont fait diverses expériences sur ce sujet. Ils ont laissé tomber d'une grande hauteur des globes du même volume, et d'un poids très-différent; et en mesurant avec soin le temps qu'il leur fallait pour arriver en bas, ils reconnurent d'abord que le même espace vertical exigeait plus de temps pour les uns, et moins pour les autres : les corps les plus lourds tombaient plus vîte, et les plus légers tombaient plus lentement. En comparant la durée de la chute de tous ces corps avec leurs poids, ces illustres savans reconnurent d'abord qu'il n'y avait aucun rapport entre ces deux choses, et que les plus légers étaient seulement *un peu plus* retardés que les autres. En partant de cette observation capitale, loin de conclure qu'il y eût quelque différence dans la pesanteur suivant la nature des corps, ils établirent au contraire que cette force était *la même* dans tous; et que les inégalités observées dans la durée de leurs chutes, devaient être attribuées à la résistance de l'air, que ces corps traversaient en tombant. L'invention de la machine pneumatique permit bientôt de démontrer la justesse de cette conséquence.

Expérience. On prend un tube de verre de cinq à six pieds de longueur, et d'un diamètre d'environ trois pouces, dans lequel on enferme un fragment de papier, et un morceau de plomb ayant une égale surface. On fait le vide dans ce tube le plus exactement qu'il se peut; et le prenant ensuite dans les

mains, on le renverse alternativement, de manière à le mettre toujours dans une position verticale. On voit à chaque fois le plomb et le papier tomber ensemble, et parcourir dans *le même temps* la longueur du tube. Le papier si léger de sa nature, paraît dans cet espace purgé d'air, aussi lourd que le plomb, et se précipite avec la même vitesse. Si l'on laisse rentrer l'air dans le tube, et qu'on le renverse de la même manière, l'on verra alors le plomb dévancer le papier sensiblement, et celui-ci resté en arrière, tomber plus lentement, et comme en flottant au travers de l'air qu'il déplace.

Cette importante et belle expérience ne peut laisser aucun doute sur la vérité de ce principe, que *la pesanteur est une, et la même dans tous les corps*, quelle que soit leur nature. Elle prouve évidemment que c'est la résistance seule de l'air, qui produit la différence que l'on remarque dans la durée de leur chute, lorsqu'ils tombent d'une même hauteur. Il est facile d'expliquer pourquoi cette résistance de l'air retarde *davantage* les corps qui ont *moins* de masse, quoiqu'à raison de l'égalité supposée de volume, ce fluide oppose à tous un obstacle égal.

Un corps qui tombe au travers de l'air, est forcé à chaque instant de déplacer, et d'écarter les molécules de ce fluide, et de leur communiquer ainsi du mouvement aux dépens de celui qu'il a lui-même. On sait que la force d'un corps qui se meut, est égale au produit de sa masse par sa vitesse. Mais la vitesse est ici la même, comme l'expérience l'a fait voir. La force d'un corps qui est entraîné par la pesanteur, est donc dans le cas présent, seulement *comme la masse*; et par conséquent celui qui est *plus léger*, jouit d'une

force motrice proportionnellement *moindre*, et a *moins* de moyens pour vaincre une résistance donnée. Si le plomb pèse par exemple, *cent fois* autant que le papier, et que la résistance de l'air dérobe en même temps *un demi degré* de force à l'un et à l'autre, il restera encore au plomb au bout de ce temps *quatre-vingt-dix-neuf et demi* degrés de force, tandis que celle du papier sera réduite à *un demi degré*. Ces deux corps qui avaient une égale vitesse au premier moment, ne pourront donc pas continuer à se mouvoir de même, et le plus léger des deux arrivera plus tard au point le plus bas. Ainsi quoique la pesanteur agisse de la même manière dans tous les corps, et leur communique à tous la même vitesse, la résistance de l'air sera cause qu'ils ne descendront pas tous d'une égale hauteur dans le même temps.

Il est donc bien reconnu que la pesanteur est *une et égale* dans tous les corps, quelle que soit leur masse, et de quelque nature qu'ils soient. On a cherché à savoir si elle était aussi la même à toutes les hauteurs où nous pouvons parvenir, et l'on a trouvé qu'il n'y avait aucune différence remarquable à cet égard. Enfin la pesanteur des corps comparée à elle-même sur les différentes parties de la terre, a présenté des *inégalités* peu considérables, mais néanmoins sensibles. On a reconnu que cette force était *moindre* dans les régions équatoriales, et qu'elle *augmentait* à mesure qu'on approchait des pôles. On trouvera la raison de ces petites inégalités dans ce qui nous reste à dire sur ce sujet.

4. *Nature et cause de la pesanteur.*

La pesanteur étant la même dans tous les corps terrestres, les entraînant tous, lorsqu'ils sont libres, avec une égale vitesse, et suivant des directions constantes qui concourent au centre de la terre, on peut dire que cette tendance est moins une propriété générale des corps, que l'effet d'une *puissance extérieure*, qui s'exerce sur tous de la même manière, et avec la même intensité. Nul corps ne pouvant se mettre en mouvement de lui-même, si nous voyons tomber tout-à-coup un corps pesant qui manque d'appui, nous devons en conclure aussitôt, que ce n'est point ce corps, mais une puissance qui lui est étrangère, qui est la cause de ce mouvement, et qui l'entraîne en bas avec la vitesse dont il est animé. Mais quelle est cette puissance, et où réside-t-elle ?

Tous les savans qui ont médité sur les grands phénomènes de la nature, ont cherché à expliquer la pesanteur des corps terrestres, et ont imaginé pour cela différentes hypothèses. Mais la plupart de ces hypothèses n'ont pu résister à un examen attentif, et sont à peine préférables au raisonnement ridicule du vulgaire, qui prétend que les corps tombent, parce qu'ils sont pesans, et qui prouve qu'ils sont pesans, parce qu'ils tombent. M. de *Varignon* expliquait la pesanteur des corps par la pression de l'air supérieur. Comment l'air peut-il presser de haut en bas, s'il n'est pesant ? et si l'air est pesant, quelle est donc la cause de sa pesanteur ? Cette explication était insuffisante, outre qu'elle est fausse et ridicule.

Descartes avait placé la cause de la pesanteur dans

un tourbillon de matière subtile qui circulant avec beaucoup de rapidité autour du globe terrestre d'Orient en Occident, poussait vers la terre tous les corps qu'il pouvait saisir dans son mouvement et qui manquaient d'appui. Mais dans cette hypothèse les corps devraient tomber par des lignes *perpendiculaires à l'axe de la terre*, et en général *obliques à sa surface*, puisque les différentes tranches du tourbillon supposé ont toutes leurs centres situés sur cet axe. Ce ne serait qu'à l'équateur que la chute des corps se ferait perpendiculairement à la surface terrestre. Ce tourbillon de matière subtile tel que *Descartes* l'avait imaginé, ne pouvait donc expliquer la pesanteur.

Bulfinger en adoptant le système du philosophe français, chercha à le concilier avec les faits, et supposa que la matière subtile tournait à la fois dans deux sens perpendiculaires l'un à l'autre, de manière que, suivant l'auteur de cette idée, il devait en résulter une pression unique dirigée vers le centre de la terre. Mais la difficulté était de prouver la possibilité de ce *double* mouvement dans *un même* fluide. *Bulfinger* vint bien à bout de faire prendre à un globe plein d'eau deux mouvemens perpendiculaires entre eux : mais il ne put en résulter ce qu'il désirait, et chaque point de la surface du globe, comme aussi les petits corps qui étaient mêlés avec l'eau, décrivaient dans leur mouvement une figure semblable au chiffre 8; de façon qu'il ne put y trouver cette pression unique dirigée vers le centre, nécessaire pour expliquer la direction que prennent les corps terrestres, lorsqu'ils obéissent librement à la pesanteur.

A tous ces systèmes aujourd'hui presque entièrement

oubliés, a succédé depuis long-temps une hypothèse plus grande, plus belle, plus simple, et plus propre à rendre raison de toutes les circonstances du phénomène que nous considérons ici. *Neuton* dont le vaste génie a embrassé l'univers entier, après avoir reconnu que les *planètes* ne pouvaient être retenues dans leurs révolutions autour du soleil, que par *une force* émanée de cet astre, ou dirigée vers lui : après s'être convaincu que la lune qui tourne autour de nous, ne peut nous demeurer fidelle qu'en vertu d'une force semblable dirigée vers la terre ; le grand *Neuton* ne vit dans la pesanteur des corps terrestres qu'un cas particulier de cette loi générale qui veut, que toutes les parties du monde matériel exercent les unes sur les autres *une attraction mutuelle*, et que les corps les plus petits soient assujétis à ceux qui ont plus de masse et de grosseur.

Tout se passe dans le ciel astronomique, comme si les corps célestes s'attiraient mutuellement *en raison directe des masses*, *et en raison inverse du quarré des distances*. Le soleil attire à lui les planètes principales : celles-ci attirent de même leurs satellites, ou planètes secondaires. C'est cette attraction combinée avec une impulsion primitive, qui produit comme on verra plus bas, leur mouvement circulaire autour du centre d'attraction. Mais cette puissance que le globe terrestre exerce sur la lune, son satellite, qui est si éloigné de nous, croit-on qu'elle ne se fera pas également sentir aux corps qui dépendent de la terre, et qui sont si près de sa surface ? *Neuton* a fait voir, que la force qui retient la lune dans son orbite autour de la terre, était justement égale à la force de la pesanteur

diminuée comme l'exige la loi *du quarré de la distance.*

La cause de la pesanteur est donc dans l'attraction que la terre exerce sur tous les corps qui sont dans sa sphère d'activité. C'est en les attirant à elle, qu'elle les force de descendre, dès qu'ils cessent d'être soutenus, et qu'elle les ramène vers sa surface, lorsque par l'impulsion d'une force quelconque ils tendaient à s'en éloigner. La propriété attractive appartenant à toutes les parties de la matière, la pesanteur doit être la *résultante* de toutes les attractions partielles, que les molécules composant le globe terrestre exercent sur les corps; et cette résultante doit évidemment être dirigée vers le centre de la terre, puisque c'est le point autour duquel toutes ces attractions se font mutuellement équilibre. Voilà donc pour quelle raison tous les corps dans leur chute libre suivent des droites qui tendent à se réunir à ce centre.

L'on a dit que la pesanteur était *la même* dans tous les corps que nous connoissons, et *la même* dans tous les temps : c'est ce qui résulte nécessairement de ce qu'elle est produite par une cause invariable, et qui est indépendante de la nature de ces corps. Cette cause est dans notre globe : on peut la considérer comme ayant son siége au centre de la terre. La pesanteur d'un corps ne pourrait varier, qu'autant qu'il s'approcherait, ou s'éloignerait du foyer où reside la force qui le maîtrise. C'est en partie pour cette raison que la pesanteur est plus petite à l'équateur, et plus grande vers les pôles, la terre, d'après les mesures des Astronomes, étant *renflée* à son équateur, et *aplatie* vers ses pôles. Quant aux hauteurs où l'homme peut parvenir, et aux

profondeurs où il peut descendre, elles sont trop peu de chose comparées au rayon du globe, pour qu'elles puissent avoir quelque influence sensible sur l'intensité de la pesanteur.

Le système qu'on vient d'exposer suffit donc pour rendre raison de toutes les circonstances du phénomène de la pesanteur. Cependant il a éprouvé pendant long-temps d'assez fortes contradictions, comme étant fondé sur une *vertu occulte* : c'est ainsi que l'on qualifiait cette propriété d'*attraction* qu'on suppose dans toute la matière. Mais l'inutilité de tous les efforts que l'on a tentés, pour expliquer la pesanteur d'une manière *plus mécanique*, et le parfait accord de toutes les parties du système, l'ont fait admettre à la fin par tous les savans. Il est donc reconnu aujourd'hui que la pesanteur ou tendance des corps vers la terre, est produite par une force qui est hors d'eux, qui paraît résider au centre du globe, et qui les tire impérieusement vers ce point, sans leur permettre de s'en éloigner jamais au-delà d'une certaine limite. C'est une loi établie pour que rien de ce qui appartient à notre globe, puisse jamais lui échapper. Au reste, cette force existe également sur tous les autres globes célestes.

5. *Lois de la pesanteur.*

Après toutes ces considérations physiques sur la nature de la pesanteur, voyons actuellement quelle est sa manière d'agir sur les corps qui lui obéissent en toute liberté. Le premier fait qui se présente ici, et qui est connu de tout le monde, c'est que *la vitesse d'un corps qui est entraîné par la pesanteur, augmente*

à chaque instant et de plus en plus. On sait qu'un corps en tombant fait d'autant plus de mal, qu'il tombe de plus haut. Or comme la force d'un corps en mouvement se compose de sa masse et de sa vitesse, et que la masse est ici la même, il faut bien que l'accroissement de force qu'il acquiert en tombant de plus haut, vienne d'un accroissement de vitesse. Mais comme il faut plus de temps à un corps pour descendre d'une plus grande hauteur, il suit qu'un corps acquiert plus de vitesse, à mesure que la pesanteur agit plus long-temps sur lui.

L'action de la pesanteur ne peut donc pas être comparée à une force d'*impulsion*. Une impulsion quelle qu'elle soit, ne peut communiquer qu'un degré de vitesse déterminé, lequel doit être constant et uniforme, lorsqu'on fait abstraction des résistances, et qui va réellement en diminuant peu à peu et s'éteint bientôt tout-à-fait ; à cause des obstacles que nous avons fait connaître. Ces obstacles s'opposent aussi aux corps que la pesanteur entraîne ; et cependant leur vitesse au lieu de diminuer, va au contraire en augmentant de plus en plus, et s'accroît avec le temps. Il faut donc que cette force, si l'on veut la comparer à une impulsion, renouvelle de temps en temps son action sur les corps qui lui obéissent. La pesanteur est l'effet d'une puissance qui réside dans le globe terrestre. L'idée la plus simple que l'on puisse se faire de sa manière d'agir, est de la considérer comme agissant *continuellement et sans relâche ;* de sorte que ses impulsions au lieu d'être intermittentes, sont continues et sans interruption. Un corps qui obéit à une force impulsive, échappe par cela même à son action : celui qui obéit à la

pesanteur, ne cesse pas pour cela d'être en prise à cette force, qui continue d'agir sur lui avec le même empire, et sans éprouver aucun affaiblissement.

Pour démontrer par un effet physique l'accroissement de vitesse que les corps acquièrent en tombant de plus haut, on prend une balle de plomb qu'on fait tomber de hauteurs différentes sur un lit de terre molle. L'enfoncement est d'autant plus grand, que la balle est tombée d'une plus grande hauteur. Quelques-uns en comparant la grandeur de l'enfoncement avec la hauteur de la chute, et trouvant que ces deux choses étaient en proportion, en avaient conclu que les vitesses communiquées par la pesanteur étaient aussi en raison de ces hauteurs : mais cette conséquence est erronée. Si la vitesse acquise était *double* lorsque la hauteur de la chute est *double*, il faudrait que l'effet fût *quadruple*, comme il a été expliqué en parlant des *forces vives*. Or l'expérience ne donnant pour ce cas qu'un effet *double*, il suit que la vitesse qui augmente bien quand la hauteur devient plus grande, croît cependant en *moindre raison* que cette hauteur.

Galilée, illustre savant qui vivait en Italie au commencement du dix-septième siècle, est le premier qui ait eu des idées justes sur la pesanteur, et c'est à lui que nous devons la connaissance des lois du mouvement des corps pesans. En mesurant les espaces qu'un corps qui tombe librement parcourt en des temps *égaux*, il reconnut le premier que ces espaces *croissaient comme les nombres impairs*, 1, 3, 5, 7, *etc.* c'est-à-dire qu'en désignant par *l'unité* l'espace vertical qu'un corps parcourt dans le *premier* instant de sa chute, l'espace parcouru dans le *deuxième* instant sera

le *triple* de celui-là ; celui décrit dans le *troisième* instant en sera le *quintuple ;* et ainsi de suite.

Galilée avait été conduit à ce même résultat, en considérant la pesanteur comme une force continuellement agissante, et qui faisait *à chaque instant* passer des degrés *égaux* de vitesse dans les corps qui lui obéissent. Voici la démonstration qu'il imagina pour prouver cette loi des espaces croissans en temps égaux.

Sur la verticale AX (fig. 11) on prend les parties *égales*, AB, BC, etc. pour représenter des portions de temps toutes *égales* entre elles ; et l'on conçoit chacune de ces portions divisée en un même nombre d'instans égaux. Si l'on suppose que la vitesse à chaque instant croisse *d'une même quantité*, les vitesses du mobile à la fin de chacun de ces instans pourront être représentées par les droites horizontales *aa*, *bb*, *cc*, etc. qui croissent uniformément comme ces instans. Ainsi la vitesse initiale étant *zéro*, ou infiniment petite, la vitesse à la fin de la première unité AB sera exprimée par BD, et elle aura acquis toute cette grandeur, par l'addition répétée de quantités égales à *aa*, qui est ce que la pesanteur communique dans le premier instant. Maintenant comme dans chaque petit intervalle de temps la vitesse peut être censée *uniforme*, les espaces décrits durant ces temps infiniment courts devant être *proportionnels* aux vitesses, ces espaces pourront aussi être représentés par les mêmes droites, *aa*, *bb*, etc. Par conséquent l'espace total parcouru pendant la première unité de temps, sera exprimé par *la somme* de toutes ces lignes, qui composent l'*aire du triangle* ABD, lorsque AB est partagé en une infinité de parties.

La vitesse à la fin de la première unité étant donc égale à BD, si l'on conçoit qu'elle persévère uniformément pendant l'unité suivante, il est facile de voir en partageant cette unité de la même façon que la première, que les vitesses à chaque instant seraient représentées par des droites égales à BD; et que l'espace total décrit dans cette seconde unité, serait exprimé par la somme de toutes ces lignes, c'est-à-dire, par l'*aire du rectangle* BCDE, laquelle est visiblement *double* de celle du triangle ABD. Ainsi la vitesse seule acquise par l'action de la pesanteur pendant la première unité de temps, et en supposant que cette force cessât alors d'agir, serait capable de faire parcourir au mobile un espace *double* de celui qu'il a décrit dans la première unité. Mais si la pesanteur continue d'agir sur lui, alors pendant cette deuxième unité il parcourra de plus un espace égal au premier; de façon que l'espace total qui répond à la *seconde* unité sera *triple* de celui qui appartient à la première. En raisonnant de même, on prouvera que l'espace décrit dans la *troisième* unité est le *quintuple* du premier, et ainsi des unités suivantes.

On a dit que *Galilée* s'était assuré par l'expérience de la justesse de son raisonnement. On peut aisément obtenir la même conviction, en faisant usage de la machine dite d'*Atwood* du nom de son inventeur. Mais à cette machine qui est d'un prix considérable, on peut en substituer une beaucoup plus simple, et qui n'est guère moins exacte. Celle-ci consiste dans une grande règle verticale de sept à huit pieds de hauteur, au sommet de laquelle, et parallèlement à son plan, est fixée une poulie très-mobile sur son axe. On fait passer sur cette poulie un long cordon, qui tient suspendus

deux poids cylindriques parfaitement égaux. Lorsqu'on veut rendre l'un des deux poids prépondérant, on le surcharge d'une petite plaque de métal; et alors celui-ci est entraîné en bas par la pesanteur, tandis que l'autre est forcé de se mouvoir de bas en haut avec une égale vitesse. L'action *efficace* de la pesanteur sur le poids additionnel, devant se distribuer également à cette masse et à celle des deux poids égaux, il en résulte que la vitesse communiquée dans ce cas par cette force, est d'*autant plus petite*, que la somme des masses est *plus grande* que la masse du poids additionnel; de sorte que si celle-ci n'est, par exemple, que la *trentième* partie de la somme des masses, l'action de la pesanteur, ou la vitesse qu'elle communiquera, ne sera que la *trentième* partie de ce qu'elle est naturellement. Mais cela n'empêchera point que la vitesse ainsi diminuée, ne suive les mêmes lois d'accroissement, puisque la pesanteur ne cessera point d'agir avec une égale intensité sur la masse qu'elle entraîne. On a recours à l'artifice qu'on vient de faire connaître, afin que les espaces parcourus par l'effet de la pesanteur étant plus petits, on puisse les observer avec plus de facilité, et reconnaître ainsi plus sûrement la loi qu'ils suivent.

Sur la hauteur de la règle doivent être marqués, d'abord l'espace que parcourt le poids descendant pendant la *première* unité de temps, ensuite et immédiatement au-dessous un espace *triple* de celui-là, et après une autre espace qui soit *cinq* fois aussi grand que le premier. Pour pouvoir saisir avec plus de précision le moment de l'arrivée du poids à chacune de ces divisions, on y fixe successivement un anneau de cuivre, dont le

plan est horizontal, et dont la largeur est telle, que le poids cylindrique peut bien passer librement au travers, tandis que la plaque métallique dont il est surchargé, y est arrêtée. Le choc de cette plaque contre l'anneau avertit ainsi par le bruit du moment que le poids arrive à la division où l'anneau est fixé ; et comme elle s'y arrête, et que l'équilibre est alors rétabli entre les deux poids, il suit que la pesanteur cesse d'agir dès-ce moment, et que le mouvement ne continue qu'en vertu de la vitesse acquise.

Maintenant si l'anneau étant placé à la *première* division, il faut *une seconde* de temps pour que le poids additionnel vienne le heurter, étant parti du point le plus élevé ; on trouvera en plaçant cet annean d'abord à la *seconde* division, et ensuite à la *troisième*, et en faisant toujours partir le poids du même point, qu'il lui faut *deux secondes* dans le premier cas, et *trois* dans le dernier. On a donc ainsi la preuve expérimentale que le mobile dans la *première* seconde a parcouru *un* espace ; qu'il en a décrit *trois* égaux à celui-là dans la *deuxième* seconde, et *cinq* dans la *troisième* : ce qu'il fallait prouver.

Il résuite de cette expérience fondamentale, que la pesanteur est vraiment une *force accélératrice constante,* qui agit d'une manière continue et sans interruption sur les corps qu'elle entraîne, et qui fait à chaque instant passer en eux un nouveau degré de vitesse. Les lois de la chute des corps sont donc renfermées dans celles établies ci-dessus sur le mouvement uniformément accéléré. Ce qu'il y a de particulier à connaître ici, c'est la *vitesse absolue* que la pesanteur engendre dans les corps qui lui obéissent librement, par l'action qu'elle

exerce sur eux durant la *première unité* de temps : on a choisi pour cela la *seconde*, qui est la *soixantième* partie de la minute. Or c'est l'expérience seule qui pouvait faire connaître cette vitesse.

Dans la démonstration géométrique apportée plus haut, on a vu qu'un corps entraîné par la force de la pesanteur, que l'on supposait agir d'une manière continue, acquérait dans la première unité de temps, une vitesse capable de lui faire décrire tout seul, et sans aucune nouvelle action de cette force, un espace *double* de celui qu'il avait parcouru dans cette unité. On aura donc la vitesse demandée, en mesurant avec soin la hauteur dont un corps grave descend, lorsqu'il est libre, pendant la *première* seconde de sa chûte. Le *double* de cette hauteur exprime la vitesse acquise pendant ce temps, et est employé pour mesurer la force de la pesanteur, ou la *gravité*.

L'expérience et l'observation ont appris qu'en faisant abstraction de tout obstacle, un corps pesant tombait dans une seconde d'une hauteur de 15 pieds et 98 millièmes de pied ancienne mesure (1), ou de $15^{P},1$ à très-peu près. Donc la vitesse demandée, ou la gravité est de $30^{P},2$, ou en mètres, de $9^{M},809$. C'est là la vitesse que la pesanteur fait passer à chaque seconde de temps dans les corps qui lui obéissent librement. C'est avec cette connaissance qu'on parviendra facilement à résoudre toutes les questions relatives à la chute des corps, en se rappelant d'ailleurs que dans le mouvement uniformément accéléré,

(1) Nous emploirons ici les mesures anciennes pour la simplicité du calcul.

la vîtesse croît comme le temps, et que *les espaces parcourus depuis le commencement sont comme les quarrés des temps écoulés*. Cette dernière proposition se tirerait encore de ce qu'on vient de voir, que les espaces parcourus *successivement* dans des temps *égaux*, suivaient la loi des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, etc; car en ajoutant ensemble les *deux premiers* de ces nombres, on a 4, qui est le *quarré* de 2; si l'on additionne les *trois premiers*, il vient 9, *quarré* de 3; les *quatre premiers* donnent 16, *quarré* de 4; et ainsi de suite.

Première question. Un corps obéissant librement à la pesanteur, on demande quel est l'espace qu'il parcourrait pendant la *dixième* seconde de sa chûte.

Réponse. Cherchez le dixième terme de la suite 1, 3, 5, etc., lequel est 19 : multipliez-le par 15, qui est, en supprimant la fraction, le nombre de pieds anciens dont un corps descend dans la première seconde : il viendra 285. C'est là la quantité exprimée en pieds, dont le corps descendra dans la *dixième* seconde, en faisant abstraction de la résistance de l'air. La même supposition aura lieu dans les questions suivantes.

Comme l'espace parcouru dans chaque seconde, augmente de 30 pieds à chaque fois, on trouverait encore la réponse à la question proposée, en prenant 9 fois 30 pieds, et y ajoutant les 15 pieds qui appartiennent à la première seconde.

Deuxième question. La chute d'un corps a duré *cinq* secondes : on demande quelle est la hauteur d'où il est tombé.

Réponse. On aura 375 pieds pour la hauteur demandée, en additionnant les *cinq* premiers nombres impairs, et multipliant par 15. Mais ainsi qu'on vient de l'observer, cette somme donne le *quarré* de 5; donc

en général on trouvera la réponse à cette question, en formant le *quarré* du temps donné, et multipliant par 15. Un puits au fond duquel une pierre n'arrive qu'au bout de *deux secondes et trois quarts*, a 113 pieds et demi de profondeur.

Troisième question. Un corps est tombé d'une hauteur de 400 pieds : on demande quel temps il a fallu pour cela.

Réponse. Les espaces étant proportionnels aux *quarrés* des temps, réciproquement les temps sont comme les *racines quarrées* des espaces. On divisera donc 400 par 15 ; ce qui donne $26 \frac{2}{3}$; et prenant la *racine quarrée* de ce dernier nombre, laquelle est $5 \frac{1}{6}$, à peu de chose près, il suit que *cinq secondes* et *un sixième* sont le temps demandé.

Quatrième question. Un corps est tombé pendant *dix* secondes : on demande quelle est la vitesse dont il est animé à la fin de cette *dixième* seconde.

Réponse. Les principes établis nous apprennent qu'on aura la vitesse demandée en multipliant par *dix* les 30 pieds qui sont, comme on a vu, la valeur de la gravité dans une seconde de tems. C'est donc 300 pieds : c'est-à-dire que ce corps frappera dans ce moment, comme étant animé d'une vitesse uniforme de 300 pieds par seconde.

Cinquième question. Un corps est tombé d'une hauteur de *cent* pieds : on demande quelle était sa vitesse au terme de sa chute.

Réponse. On cherchera d'abord quel est le temps qu'il lui a fallu pour tomber de cette hauteur ; après quoi l'on trouvera comme dans la question précédente la vitesse demandée. Mais pour avoir le temps de la chute, il faut observer, que si ce temps était connu, on trouverait comme dans la deuxième question, l'es-

pace parcouru, en multipliant le temps par lui-même, et ensuite par 15. Divisons donc d'abord 100 par 15 ; ce qui donne $6\frac{2}{3}$. Ce nombre est le *quarré* du temps cherché. En le convertissant en *neuvièmes*, on a $\frac{60}{9}$. Le temps de la chute a donc été de $\frac{8}{3}$ de seconde environ, ou d'un peu moins de *deux secondes et deux tiers* ; et la vitesse du corps au moment de son arrivée, est par conséquent de près de 80 pieds.

Sixième question. On demande quelle est la hauteur d'où il faudrait laisser tomber un corps, pour qu'il eût au point le plus bas une vitesse donnée, de 100 pieds par seconde par exemple.

Réponse. Cherchez d'abord le temps nécessaire pour acquérir cette vitesse ; et ensuite l'espace qui répond à ce temps ; et la question sera résolue. Or, on trouve par la quatrième question, que le temps pour acquérir une vitesse de 100 pieds, est de *trois secondes et un tiers* ; et par la deuxième, que l'espace décrit pendant ce temps, est de 166 pieds et *deux tiers*. Il est donc nécessaire qu'un corps tombe de toute cette hauteur, pour acquérir la vitesse supposée de 100 pieds par seconde. (2)

---

(2) Tous les problèmes relatifs à la chute libre des corps pesans trouvent leur solution dans les formules du mouvement uniformément accéléré, où nous mettons g initiale de *gravité*, à la place de u. Ainsi les formules, $v = gt$, et $e = \frac{1}{2}gt^2$, où g égale 30,2 pieds, ou bien $9^m,809$, contiennent la réponse à toutes les questions ci-dessus. On en déduit facilement celles-ci : $e = \frac{v^2}{2g}$, et par suite, $v = \sqrt{2ge}$. On en tire encore : $t = \frac{v}{g}$, et $t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$; et enfin si g était inconnu, on aurait pour le déterminer : $g = \frac{2e}{t^2}$.

Dans tous les résultats que nous venons d'obtenir, on n'a eu aucun égard à la résistance de l'air. Cependant cet obstacle inévitable, en ralentissant la vitesse des corps qui tombent, doit prolonger la durée de leur chute, diminuer les espaces parcourus dans un temps donné, et altérer les vitesses acquises. On affaiblit l'influence de cet obstacle, en choisissant des corps qui aient beaucoup de masse et peu de volume: mais on ne saurait l'anéantir; et cette résitance, comme on a dit, augmentant avec le quarré de la vitesse, il suit qu'elle peut devenir très-considérable, et donner lieu à des résultats fort éloignés de ceux que promettaient la théorie et le calcul.

6. *De la pesanteur combinée avec une impulsion verticale.*

On a considéré le mouvement d'un corps qui se meut de haut en bas entraîné par la seule action de la pesanteur. Mais si le mobile avait reçu en oûtre une impulsion quelconque, il ne faut pas croire que cette force étrangère pût déranger en aucune façon l'effet de la gravité. Non : quelle que soit la vitesse imprimée à un corps, dans quelque direction qu'il soit poussé, dès qu'il cesse d'être soutenu, il ne peut échapper à la force de la pesanteur, qui agit toujours sur lui en toute liberté, et avec la même énergie que si elle était seule.

Si donc un corps a reçu d'avance une impulsion verticale *de haut en bas*, alors à la vitesse communiquée par la pesanteur au bout d'un certain temps, il faudra ajouter la vitesse uniforme due à cette impulsion, et cette somme exprimera toute la vitesse dont le corps

jouit à ce moment. Quant à l'espace parcouru jusqu'alors, il se composera de l'espace décrit pendant ce temps par l'effet de la pesanteur, et de celui que l'impulsion supposée fait parcourir dans le même temps. (1)

Mais si l'impulsion verticale est donnée de *bas en haut*, alors la pesanteur loin d'ajouter à la vitesse du mobile, travaille au contraire sans cesse à la diminuer, et finit bientôt par la détruire totalement. Ainsi le mobile après s'être élevé jusqu'à une certaine hauteur, cessera de monter davantage, et commencera à descendre de la même manière que s'il partait du repos. Il emploîra pour revenir au point d'où il était parti, *autant de temps* qu'il lui en a fallu pour parvenir à sa plus grande hauteur, et il aura en arrivant en bas la *même vitesse* qu'il avait en partant. En effet, c'est la pesanteur qui détruit peu à peu toute la vitesse d'*ascension* : c'est elle aussi qui ramène en bas le mobile : son action, comme on sait, est *la même* dans tous les instans. Cette force ne peut donc donner dans un sens que ce qu'elle a ôté dans le sens contraire ; et il lui faudra évidemment un temps *égal* pour l'un et pour l'autre.

Supposons donc qu'un corps soit poussé de bas en haut avec une vitesse *uniforme* de 100 pieds par seconde, on demande pendant combien de temps ce corps montera, et quelle est la hauteur où il parviendra, abstraction faite de toute résistance.

---

(1) V étant la vitesse d'impulsion, les formules pour ce cas sont : $v = V + gt$, et $e = Vt + \frac{1}{2} gt^2$. Elles sont les mêmes que les précédentes, quand on fait $V = o$, ou qu'il n'y a pas eu d'impulsion.

On voit d'abord que le mobile qui, à chaque seconde, devrait s'élever d'une centaine de pieds, si ce n'était la pesanteur, perdra par cette cause, 15 pieds dans la première seconde, *trois fois* 15, ou 45 pieds dans la deuxième, et ainsi des autres, en augmentant à chaque seconde sa perte de 30 pieds. On peut déjà conclure de là qu'il montera pendant moins de *quatre* secondes, et qu'il sera de retour avant le commencement de la *huitième.*

On obtiendra une réponse plus précise en observant qu'une vitesse donnée ne peut être détruite que par une vitesse *égale et contraire.* La vitesse ascensionnelle de 100 pieds par seconde ne peut donc être anéantie par la pesanteur, qu'au bout du temps nécessaire pour que cette force produise une *égale* vitesse. Or, par la quatrième question ci-dessus, on trouve facilement, qu'il lui faut pour cela *trois secondes et un tiers.* C'est donc là le temps pendant lequel le mobile montera, après quoi il emploîra un temps égal pour descendre. Mais pendant ce temps de trois secondes et un tiers, un corps pesant descend de 166 *pieds et deux tiers* : c'est donc là aussi toute la hauteur où le mobile est parvenu. On a donc répondu aux questions proposées.

En général, on aura le temps pendant lequel le mobile est monté, en divisant sa vitesse *initiale* par 30, qui est en pieds la vitesse que la pesanteur communique dans une seconde de temps ; et l'on trouvera la hauteur à laquelle il est parvenu, en divisant par 60 le *quarré* de cette même vitesse initiale. (2)

---

(2) Les formules pour le cas que nous considérons ici, sont $y = V - gt$, et $e = Vt - \frac{1}{2} gt^2$. La première donne à chaque

Puisqu'un corps lancé verticalement de bas en haut, met autant de temps à monter qu'à descendre, si on tire une balle dans cette direction, et que l'on compte le nombre de secondes qui s'est écoulé depuis le moment du départ, jusqu'à celui où la balle revient frapper la terre, on aura tout ce qu'il faut pour déterminer, soit la *hauteur* à laquelle la balle est parvenue, soit *la vitesse* qu'elle avait en partant. Celle-ci est égale à la moitié du nombre des secondes multipliée par 30; et l'autre se trouve, en multipliant la vitesse par elle-même et divisant par 60. Mais c'est ici surtout que les résultats de l'expérience doivent différer de ceux que donne le calcul.

La pesanteur n'est pas le seul obstacle qui s'oppose à l'élévation du mobile : la résistance de l'air retarde encore sa vitesse ascendante, et d'autant plus qu'il a été poussé par une plus grande force. Le mobile ne montera donc pas à toute la hauteur théorique, et la quantité dont il restera au-dessous, sera plus grande à proportion que sa vitesse initiale aura été plus consi-

---

instant, la vitesse qui reste au mobile, et l'autre la hauteur où il est arrivé. Si l'on fait $v = 0$, c'est-à-dire, si l'on suppose que toute la vitesse d'ascension est anéantie, alors $V = gt$, d'où $t = \frac{V}{g}$, qui donne le temps nécessaire pour cela. Si dans la seconde formule on fait $e = 0$, ce qui suppose que le mobile est revenu au point du départ, on a $Vt = \frac{1}{2} gt^2$; d'où $t = \frac{2V}{g}$. C'est le temps total, lequel est double du précédent. La première valeur de t introduite dans la seconde formule donne : $e = \frac{1}{2} \frac{V^2}{g}$. C'est l'expression de la hauteur où le mobile est parvenu.

dérable. Il n'aura pas non plus à son retour la *même* vitesse qu'il avait au moment de son départ ; et il emploîra pour descendre *plus de temps* qu'il ne lui en a fallu pour monter ; de sorte que les résultats donnés par le calcul, en négligeant la résistance de l'air, se trouvent entièrement fautifs lorsqu'on veut les appliquer au mouvement d'un corps qui est lancé au travers de ce fluide. C'est ce qui se verra clairement par le calcul de l'expérience suivante.

Expérience. Avec un fusil à vent, instrument connu des physiciens, on a tiré une balle de bas en haut dans une direction assez exactement verticale ; pour que la balle soit venue retomber au même endroit au bout de 20 secondes. Si l'on considère cette expérience comme faite dans le vide, le temps de la montée et celui de la descente auront été chacun de 10 secondes : la balle sera parvenue à une hauteur de 1500 pieds ; et sa vitesse en partant était de 300 pieds par seconde. A son retour vers la terre sa vitesse est encore égale à celle-là, et c'est avec toute cette force qu'elle vient frapper les corps qui la reçoit. Tels sont les résultats que donne l'hypothèse du vide : c'est tout autre chose, quand on a égard, comme il faut, à la résistance de l'air.

On trouve d'abord que le temps de la montée n'est plus égal au temps de la descente : la balle s'est élevée pendant *huit secondes et trois quarts* à peu près, et elle a mis *onze secondes et demie* à descendre. Secondement elle est parvenue à une hauteur de 1130 pieds environ, ayant à son départ une vitesse de 685 pieds, et à son retour une vitesse seulement de 144 pieds. Avec cette vitesse *initiale* de 685 pieds, la balle dans le vide serait montée pendant près de 23 secondes ; elle serait arrivée à

une hauteur de 7850 pieds : elle aurait mis le même temps à descendre, et sa vitesse *finale* eût été également de 685 pieds. La résistance seule de l'air a donc suffi pour lui faire perdre près des *six septièmes* de son élévation, et pour réduire sa dernière vitesse à moins d'*un quart*, et toute la durée de son mouvement à moins de la *moitié*. (*)

On a vu qu'à la fin de la *première* seconde la seule vitesse acquise était capable de faire parcourir au mobile pendant la seconde suivante un espace *double* du premier. La même chose a lieu à toutes les époques de la chute d'un corps : c'est-à-dire, qu'à la fin d'un temps quelconque, un corps qui tombe librement, a toujours une vitesse suffisante, pour décrire dans un temps *égal* un espace *double* de celui qu'il a décrit dans le temps écoulé. Un corps tombé d'une certaine hauteur, pourrait donc avec la vitesse qu'il a au terme de sa chute, parcourir un espace *double* de cette hauteur pendant le *même* temps qu'il a mis à descendre.

Si l'on conçoit donc qu'au moment où un corps tombant est arrivé en bas, la direction de son mouvement vient à changer, et qu'il est repoussé de bas en haut suivant la même verticale, le mobile dans un temps égal à celui de sa descente, parviendrait à une hauteur *double* de celle d'où il est descendu, et continuerait à monter avec cette même vitesse, en supposant que la pesanteur eût cessé d'agir sur lui. Mais comme lorsqu'il rejaillit ainsi et s'élève, cette force continue à se faire sentir de la *même manière*, il suit que le mobile ne pourra point arriver plus haut que le point d'où il

(*) Voyez la Note (*d*).

était parti, et qu'il y parviendra dans un temps *égal* à celui de sa chute. Ainsi *un corps pesant tombé d'une certaine hauteur, jouit lorsqu'il est arrivé au point le plus bas, d'une vitesse capable de le faire remonter à la même hauteur dans le même temps, nonobstant l'action de la pesanteur.*

La règle qu'on vient d'établir, est certaine et vraie en théorie : mais dans la pratique on trouve que les effets ne sont pas exactement d'accord avec elle. Les corps tombés ne remontent pas tout-à-fait à la hauteur d'où ils sont descendus : et c'est encore la résistance de l'air qui en est la principale cause. Une bille d'ivoire tombant verticalement sur une tablette de marbre bien horizontale, devrait rebondir jusqu'au point d'où elle est tombée : mais l'imperfection du ressort, et la résistance que l'air oppose, ne permettent pas qu'elle y puisse arriver. La bille monte donc un peu moins à chaque bond, et son mouvement alternatif qui semblait devoir durer toujours, se trouve bientôt arrêté.

7. *Des aérolithes.*

La résistance des milieux étant proportionnelle au quarré de la vitesse, il suit, que quelle que soit la force qui pousse un corps de bas en haut, il est tout-à-fait impossible que ce corps s'éloigne de la terre au-delà d'une certaine limite toujours peu distante de la surface du globe, vers lequel il est ensuite ramené par la force triomphante de la pesanteur. Pour qu'un corps pût échapper à l'attraction terrestre, il faudrait qu'il fût poussé avec une vitesse bien supérieure à celle que peuvent communiquer les agens que nous connaissons; et lors même qu'une cause quelconque lui aurait im-

primé cette extrême vitesse, la résistance de l'air serait alors si grande, que cet obstacle aurait bientôt affaibli, et même totalement détruit l'effet de cette impulsion.

Les corps qui sont dépendans de notre terre, ne cessent donc jamais de lui être soumis; et elle ne peut rien perdre de ce qui lui appartient. Il paraît qu'il n'en est pas de même de la planète de la lune, s'il est vrai qu'il faille reconnaître comme lui ayant appartenu, les pierres qui tombent parfois sur la terre. Ce phénomène *météorologique* ou, si l'on veut, *astronomique* semble aujourd'hui parfaitement constaté. Des pierres de différente grosseur, et dont quelques-unes se sont trouvées peser plus de *cent livres*, sont tombées au travers de notre atmosphère en des temps et en des lieux différens. Toutes ces pierres comparées entre elles ont paru de même nature, et contenir les mêmes principes. Leur composition est étrangère à notre globe; et l'on assure qu'il ne s'en trouve pas de pareilles, ni à la surface, ni dans l'intérieur de la terre, quoique les principes dont elles sont formées, nous soient parfaitement connus, et soient répandus indistinctement sur notre planète. Ces pierres en outre paraissent avoir éprouvé l'action du feu : au moins leur surface est noircie, et comme calcinée.

On a imaginé divers systèmes pour rendre raison d'un phénomène aussi extraordinaire, et long-temps regardé comme un erreur populaire. Parmi ces systèmes il en est un qui établit que ces pierres sont d'*origine lunaire*. Les astronomes pensent depuis quelque temps qu'il existe des volcans dans la lune; et il y a en effet quelques observations qui semblent en prouver l'existence. Cela étant, l'on suppose que ces volcans peuvent

lancer des corps avec une vitesse assez grande, pour les soustraire au pouvoir de la lune et les faire passer sous l'empire de la terre.

Il est certain que les corps qui sont à la surface de la lune, lui sont soumis par une force semblable à celle qui soumet à la terre les corps qui sont à sa surface. Il y a une pesanteur *lunaire*, comme il y a une pesanteur *terrestre:* les corps qu'une force quelconque pousse loin du centre de la lune, y sont sans cesse rappelés par cette puissance. Mais la pesanteur étant le résultat de l'attraction, et celle-ci dépendant de la masse attirante, il suit que la force de la pesanteur est *moindre* sur la lune que sur la terre, parce que la masse de la lune est beaucoup plus petite que celle du globe terrestre. En second lieu, il est reconnu que l'atmosphère de notre satellite est beacoup plus rare que notre air, et qu'elle s'élève au plus à *quelques centaines de pieds;* tandis que l'atmosphère de la terre a une hauteur de *quinze à dix-huit lieues.*

On conçoit donc d'après ces considérations, qu'il est possible qu'un corps lunaire soit lancé par un volcan avec une vitesse assez grande, pour arriver, malgré le retardement que sa pesanteur lui fait éprouver, au-delà du point où les attractions de la lune et de la terre sont égales. Alors c'est notre globe qui s'emparera de ce corps, et qui l'amenera vers nous avec une vitesse toujours croissante, mais que ralentira ensuite la résistance de notre atmosphère. En arrivant près de la terre ces corps pourront paraître *lumineux* et *incandescens*, comme on l'a observé quelquefois, à cause de leur extrême vitesse, et du frottement violent qu'ils éprouvent dans notre air. On a calculé, que pour

qu'un corps fût ainsi perdu sans retour pour le globe de la lune, il suffisait que sa vitesse initiale fût le *quadruple* de celle que la poudre à canon peut imprimer aux corps terrestres : ce qui ne paraît pas hors de vraisemblance.

CHAPITRE VIII.

DE LA PESANTEUR MODIFIÉE PAR UNE RÉSISTANCE.

1. *Mouvement des corps pesans sur un plan incliné.*

Lorsqu'un corps repose sur un plan parfaitement *horizontal*, il demeure en repos, ou plutôt en équilibre entre la force de la pesanteur qui le sollicite, et la résistance du plan qui est directement opposée à cette force, et la détruit complétement. Il n'existe ici aucune raison pour que le corps se mette en mouvement d'aucun côté ; et tout ce qui peut arriver, c'est que si le plan a quelque flexibilité, il cède un peu et se creuse de quelque chose, lorsque le poids du corps est assez considérable. C'est à cela que se borne alors tout l'effet de la pesanteur.

Mais si le plan qui supporte le corps, n'est point parallèle à l'horizon, s'il lui est *incliné* d'une manière quelconque, alors n'étant plus *directement* opposé à la

pesanteur, l'action de cette force ne sera plus détruite en totalité; et comme en dernier résultat son but est d'approcher les corps du centre de la terre, la chose pouvant ici avoir lieu, le mobile descendra donc le long du plan incliné, jusqu'à ce qu'il soit arrivé au point le plus bas; et son mouvement se fera avec une vitesse, et suivant des lois qu'il est facile de déterminer, lorsqu'on connaît l'inclinaison du plan.

Soit AB (fig. 18) un plan incliné à l'horizon. Si par les points A et B on mène une verticale et une horizontale qui se rencontrent en C, on aura BC pour *la base* du plan, et AC pour *sa hauteur* : AB en est *la longueur*. Supposons maintenant un corps M posé en un point quelconque de ce plan. Si du centre du corps on abaisse une verticale GX, elle indiquera le sens suivant lequel la pesanteur sollicite le corps; et comme il n'est pas possible qu'il prenne cette direction, sur GP pris arbitrairement pour représenter la force de la pesanteur, et considéré comme diagonale, on construira un parallélogramme dont un côté GK soit *parallèle* au plan, et l'autre GH lui soit *perpendiculaire*. La force de la pesanteur sera ainsi décomposée en deux forces, dont l'une sera détruite par la résistance du plan, et l'autre aura son effet tout entier, puisque le plan ne lui oppose aucun obstacle. C'est donc à la force GK que le mobile obéira. Quant à la force GH, elle exprimera la pression que supporte le plan.

La quantité GP prise arbitrairement sur la verticale GX, ayant servi à représenter l'effet de la pesanteur sur un corps qui lui obéit librement, s'appelle la *pesanteur absolue*. La quantité GK prise sur la parallèle au

plan, et qui sert à exprimer l'effet de cette force contrariée par le plan, se nomme la *pesanteur relative.* Lorqu'un corps libre descendrait verticalement de la hauteur GP, un corps posé sur le plan AB, ne parcourrait que l'espace GK dans le même temps. Si l'on veut avoir le rapport entre la pesanteur absolue, et la pesanteur relative, on n'a qu'à comparer ensemble les deux triangles GPK et ABC, et l'on trouvera facilement que *la pesanteur relative* est à *la pesanteur absolue* comme *la hauteur du plan* est à *sa longueur.* Comme à mesure que le plan s'incline davantage à l'horizon, sa hauteur devient plus petite par rapport à sa longueur, la pesanteur relative diminue donc de plus en plus à proportion que le plan approche plus d'être horizontal.

D'après le principe qu'on vient d'établir, si l'on veut avoir la valeur de la pesanteur relative sur un plan dont l'inclinaison est connue, ou ce qui est la même chose, la vitesse qu'un corps acquiert le long du plan en une seconde de temps, *on multipliera* la pesanteur absolue que nous avons trouvée ci-dessus de 30,2 pieds, par la hauteur du plan, et l'*on divisera* ensuite par sa longueur, l'une et l'autre exprimées de même. Si la hauteur n'est que la *moitié*, le *tiers* ou le *quart* de la longueur, la vitesse acquise en une seconde ne sera que la *moitié*, le *tiers* ou le *quart* de 30,2 pieds; et cette vitesse n'est pas dans le sens vertical de haut en bas, mais dans le sens du plan, et inclinée de même à l'horizon.

L'inclinaison du plan étant uniforme sur toute son étendue, l'obstacle qu'il oppose à la pesanteur est par-

tout le même, et doit par conséquent diminuer son action de la même manière sur tous les points de sa longueur. Il suit de là que la pesanteur relative qui agit *continuellement* sur le mobile et avec *la même énergie*, doit accélérer son mouvement le long du *plan incliné* de la même manière, et suivant les mêmes lois qui règlent le mouvement d'un corps qui obéit librement à la pesanteur. Pour résoudre donc toutes les questions que l'on peut proposer à ce sujet, on fera usage de ce qui a été dit ci-dessus : le seul changement à faire consistera à mettre à la place de la pesanteur absolue, la pesanteur relative déterminée, comme on a dit, d'après l'inclinaison du plan. (1)

Si l'on veut donc comparer le mouvement des corps qui descendent par des plans inclinés différens, on trouvera 1.° que ce mouvement est d'autant plus lent, que la hauteur du plan est plus petite en comparaison de sa longueur ; 2.° que les espaces parcourus en *même temps* sur des plans de *même hauteur*, sont *en raison inverse* des longueurs des plans ; 3.° que les temps nécessaires pour parcourir les longueurs de ces plans qui ont une égale hauteur, sont *en raison directe* de ces longueurs ; 4.° que si les plans ont des hauteurs différentes et une égale longueur, les espaces parcourus en même temps seront *proportionnels* à ces hauteurs, et les temps nécessaires pour descen-

---

(1) En appelant g' la pesanteur relative, h la hauteur du plan, et l sa longueur, on a d'abord : $g' = \frac{gh}{l}$. Ensuite $v' = g't'$, et $e' = \frac{1}{2} g't'^2$, en marquant d'un accent tout ce qui est relatif au plan incliné.

dré par ces plans, seront en *raison inverse* des racines quarrées des mêmes hauteurs. (2)

On peut vouloir aussi comparer le mouvement d'un corps qui descend le long d'un plan incliné, avec celui d'un autre corps qui tombe librement suivant une ligne verticale. Soit donc un plan incliné AB (fig. 19) dont la hauteur est AC. On peut demander dans quel rapport sont les temps qu'il faut à deux corps descendant l'un par AB et l'autre par AC, pour arriver à la même droite horizontale BC. On voit de suite qu'il faudra plus de temps au premier de ces corps, parce qu'il a plus de chemin à faire, et parce que la force qui l'anime est moindre. En ayant égard, comme il faut, à ces deux raisons, on trouve que *le temps par la hauteur du plan* est *au tems par la longueur*, comme *la hauteur du plan* est à *sa longueur*. (3)

Quant aux vitesses que les deux mobiles ont acquises, quand ils sont l'un et l'autre arrivés en bas, il est facile de s'assurer que ces vitesses sont *égales*. Car si les forces accélératrices qui entraînent les deux mobiles, sont différentes, il y a aussi la même différence et en sens contraire, dans la durée de leur action, ce qui doit donner le même résultat final. Ainsi donc un

---

(2) Les formules précédentes donnent : $e' = \frac{1}{2}\frac{gh}{l}t'^2$, d'où l'on tire : $t' = \sqrt{\frac{2le'}{gh}}$.

(3) La pesanteur absolue nous a donné : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. La pesanteur relative nous donne : $t' = \sqrt{\frac{2l}{g'}}$. C'est, en mettant pour g' sa valeur : $t' = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}}$. On conclura de là, $t : t' :: h : l$.

corps qui tombe le long d'un plan incliné, a dans le sens de ce plan, lorsqu'il est arrivé au point le plus bas, *la même vitesse* qu'il aurait eue dans le sens vertical, s'il était tombé librement de toute la hauteur du plan. (4)

Si l'on veut savoir en quel point du plan incliné est le mobile qui le parcourt, lorsque celui qui descend par la hauteur du plan, est arrivé en bas; on observera que les espaces parcourus *en même temps* en vertu de forces accélératrices différentes, sont nécessairement dans le rapport de ces forces; c'est-à-dire ici comme la hauteur et la longueur du plan. Si donc de l'extrémité C de AC on abaisse une perpendiculaire sur AB, le point D où aboutit cette perpendiculaire, sera le point cherché. Ainsi tandis que l'un des mobiles est descendu de toute la hauteur AC du plan incliné, l'autre a parcouru sur ce plan seulement la partie AD.

Si l'on prend pour diamètre la verticale AC (fig. 20), hauteur commune de tant de plans inclinés qu'on voudra, et qu'on décrive sur cette droite une demi-circonférence de cercle : les points où cette demi-circonférence coupera tous ces plans inclinés, seront ceux où les divers mobiles qui les parcourent, partis au même instant, arriveront en même temps, et au moment où

---

(4) Pour la vitesse *finale* du corps qui tombe par AC, on a : $v = gt$; et pour celle du corps qui tombe par AB, $v' = g't'$. En mettant dans cette dernière formule les valeurs de g' et de t' qui sont $\frac{gh}{l}$, et $\frac{tl}{h}$, il vient $v' = gt$. Donc, $v' = v$. Les vitesses finales sont donc égales; mais leurs directions sont différentes.

celui qui tombe par la verticale sera arrivé en C. D'ailleurs tous ces mobiles parvenus à la même horizontale, jouiront tous de la même vitesse, chacun suivant sa direction particulière, et ils auront mis pour y arriver, des temps *proportionnels* aux longueurs de ces plans.

Le moyen dont on vient de faire usage pour résoudre la dernière question, nous met en droit de conclure, que dans un cercle dont le plan est vertical, toutes les *cordes* qui partent de l'extrémité supérieure de son diamètre, et par suite toutes celles aussi qui aboutissent à l'extrémité inférieure de ce diamètre, sont toutes parcourues en des temps *égaux*, quelle que soit l'inégalité de leurs longueurs; et ce temps est *le même* que celui qu'il faut à un corps pesant pour tomber de toute la hauteur de ce diamètre.

On emploie en physique un appareil particulier pour démontrer cette conséquence. C'est une grande surface plane sur laquelle est tracée une demi-circonférence de cercle. Une règle creusée en gouttière, s'applique contre cette surface, et remplit les fonctions d'une corde du cercle. A l'extrémité supérieure du diamètre posé verticalement, est fixée une poulie fort mobile, sur laquelle on fait passer un cordon qui sert à soutenir une balle de plomb. Une balle pareille doit rouler en bas le long de la gouttière, que l'on peut incliner plus ou moins, mais qui se termine toujours à l'extrémité inférieure du diamètre vertical. Si on laisse donc tomber à la fois les deux balles, l'une librement du haut du diamètre, et l'autre sur la règle du point où elle coupe la circonférence, on remarquera qu'elles arrivent à terre toutes les deux en même

temps; et comme l'oreille est ici meilleur juge que l'œil, on observera que les deux balles ne frappent qu'un seul coup, ce qui prouve clairement qu'elles arrivent en bas dans le même instant. Au reste, l'expérience n'est ici qu'un moyen de rendre sensible une vérité qui est d'ailleurs parfaitement démontrée.

2. *Mouvement le long de plusieurs plans inclinés.*

Voyons à présent ce qui arrive lorsqu'un corps pesant parcourt *successivement* plusieurs plans de plus en plus inclinés à l'horizon. D'abord en parcourant le premier plan, il acquiert une vitesse égale à celle qu'il eût acquise en tombant librement de la hauteur de ce plan : mais cette vitesse, il l'a dans le sens du plan qu'il a parcouru; et comme le plan subséquent est incliné à celui-là, il fait nécessairement obstacle à cette vitesse. Le mobile vient donc heurter ce nouveau plan, et il est obligé de changer la direction de son mouvement. Or, ce choc, et ce changement de direction lui font éprouver une *perte*, qu'on peut déterminer de la manière suivante.

Soient AB, BC, CD (fig. 21) plusieurs plans inclinés disposés les uns à la suite des autres, et un mobile M qui doit les parcourir successivement par la seule action de la pesanteur. Le mobile en parcourant le premier plan AB, a au point B la même vitesse, que s'il était tombé de la hauteur AH : mais cette vitesse est dans le sens de AB prolongé. Représentons-la par BG. Comme au point B la direction du mouvement doit changer, il faut décomposer la vitesse acquise BG en deux, l'une BE perpendiculaire au nouveau plan, et qui sera détruite par la résistance de ce plan, et

l'autre BF dans la direction du second plan, et qui subsistera en entier, puisque rien ne s'y oppose. C'est donc avec cette dernière vitesse que le mobile passera sur le plan BC : mais il est facile de voir qu'elle est moindre que la vitesse acquise BG. Si du point B, et d'un rayon égal à BG, on décrit un arc de cercle GK, la vitesse restante *sera à* la vitesse acquise *comme* BF *est à* BK. Mais BK est le rayon de l'arc décrit, et BF s'appelle le *cosinus* de cet arc, ou de l'angle FBG, qui est l'inclinaison mutuelle des deux plans consécutifs. Donc *la vitesse conservée est égale à la vitesse acquise multipliée par le cosinus de l'angle que les deux plans font entre eux.*

C'est avec *la vitesse* qu'on vient de déterminer, que le mobile passe sur le plan BC : mais la pesanteur qui continue d'agir sur lui, augmente encore cette vitesse pendant son mouvement sur ce plan ; de façon qu'arrivé en C, il a de *plus* toute celle qu'un corps peut acquérir en tombant de la hauteur du plan BC. En opérant comme on vient de faire, on trouvera de même la vitesse que conserve le mobile en passant sur le troisième plan ; et on l'augmentera de celle qu'il acquiert en parcourant ce plan : et ainsi de suite, s'il y en avait un plus grand nombre. On peut donc toujours trouver facilement la *vitesse finale* d'un mobile, qui est descendu par une suite de plans dont les inclinaisons sont connues, vitesse qui est toujours plus petite que *celle qui est due à la somme des hauteurs* de ces plans, tant qu'ils font entre eux des angles sensibles.

3. *Mouvement d'un corps pesant le long d'un arc de courbe en général.*

Si le mobile au lieu de parcourir les côtés d'*un polygone*, descend par *un arc de courbe* dont le plan est vertical ; on considèrera cette courbe comme composée de petites droites infiniment courtes, et formant entre elles des angles infiniment ouverts. Or le *cosinus* d'un angle de cette espèce ne diffère pas du rayon : donc la vitesse du mobile n'éprouvera aucun déchet en passant d'un point de la courbe au point suivant ; et lorsqu'il sera arrivé au point le plus bas, il aura la *même vitesse*, que s'il était tombé de la hauteur verticale de l'arc qu'il a suivi.

Un corps qui est tombé d'une certaine hauteur, jouit comme on a vu, d'une vitesse capable de le faire remonter dans le même temps à la même hauteur, nonobstant l'action continuée de la pesanteur sur lui. Donc un mobile qui est descendu par un arc de courbe, est capable en suivant la même courbe ou une autre, *de remonter jusqu'à la hauteur d'où il est tombé.* Il en est de même d'un corps qui descend par un seul plan incliné : il a au point le plus bas une vitesse capable de le faire remonter à la même hauteur sur un plan semblablement incliné, ou non, en supposant que la direction de son mouvement soit convenablement changée.

Le temps qu'il faut à un corps pour tomber d'une hauteur donnée, se détermine facilement par ce qu'on a vu ci-dessus, lorsque la chute se fait, ou par une droite verticale, ou par un plan uniformément incliné; parce que dans ces deux cas l'action de la pesanteur est

dans tous les instans, *égale à elle-même.* Mais lorsque le mobile descend par plusieurs plans diversement inclinés, et surtout s'il suit une ligne courbe; alors la détermination du temps nécessaire pour qu'il arrive du point le plus élevé au point le plus bas, est fort difficile, par la raison que l'action de la pesanteur sur ce mobile *varie* pendant la durée de sa chute. Il est évident que le temps de la descente par cette courbe, sera *plus long* ou *plus court*, selon que dans ses différens points, elle sera *plus ou moins* opposée à la pesanteur. Nous nous contenterons d'exposer ici les résultats donnés sur ce sujet par le calcul, et d'indiquer les expériences qui peuvent servir à en vérifier une partie.

4. *Mouvement d'un corps pesant par un arc de cercle.*

Lorsqu'un corps descend par un arc de cercle dont le plan est vertical, et dont l'extrémité inférieure est parallèle à l'horizon, le temps qu'il emploie pour parcourir cet arc, est *plus court* que celui qu'il lui faut pour décrire la corde du même arc. Cette assertion est singulière, et néanmoins elle est prouvée d'une maniere incontestable. De deux chemins partant d'un même point et aboutissant à un même point, l'arc de cercle et sa corde, parcourus l'un et l'autre en vertu d'une même puissance, la pesanteur, c'est *le plus long qui exige le moins de temps.*

On peut entrevoir la raison de ce fait. La moitié supérieure de l'arc DFE (figure 22) étant moins inclinée à l'horizon que la moitié correspondante de la corde DE, la pesanteur a dans cette partie plus

d'avantage sur le mobile qui décrit l'arc, que sur celui qui suit la corde. Le premier arrivera donc en F, milieu de sa course, avant que l'autre soit arrivé en K, milieu de la sienne. Mais à ce point F de l'arc, la vitesse acquise est plus grande que celle qui a lieu au point K de la corde, parce que le premier point est *verticalement plus bas* que le dernier, et que la vitesse y est due à la hauteur DG, plus grande que DI, hauteur correspondante au milieu de la corde. Le mobile qui descend par l'arc de cercle a donc jusque-là un *double avantage* sur celui qui parcourt la corde de cet arc. A la vérité dans la dernière moitié de leur route, la pesanteur a moins de prise sur le premier mobile que sur le dernier; l'accélération de celui-là diminue tandis que l'accélération de l'autre se fait toujours suivant la même loi. Mais ceci ne fait perdre au premier mobile qu'une partie de son avantage, et n'empêche pas qu'il n'arrive encore *avant l'autre* au point le plus bas de leur chute.

On appuye ce raisonnement du secours de l'expérience, en faisant usage de l'appareil décrit ci-dessus. On attache au centre du demi-cercle un fil que l'on fait de la longueur du rayon, et qui porte une balle de plomb. Une autre balle pareille à celle-là est suspendue à l'extrémité supérieure du diamètre vertical, tandis que la première est portée en quelque point de la circonférence. Tout-à-coup on les abandonne l'une et l'autre à la pesanteur, et l'on remarque que celle qui a décrit l'arc de cercle, est arrivée au point le plus bas, avant la balle qui est descendue par le diamètre vertical. Or le temps de la chute par ce diamètre est, comme on a vu, égal au temps par

la corde qui se termine à son extrémité inférieure. Donc le temps par un arc de cercle est *plus court* que le temps par la corde de cet arc : ce qu'il fallait prouver.

Le rapport de ces deux temps, lorsque l'arc est fort petit, est celui de 3,141 à 4, ou le même que celui *du quart de la circonférence au diamètre.*

5. *Chute d'un corps par un arc de cycloïde.*

L'arc de cercle n'est pas la courbe par laquelle un corps descend dans *le moins de temps.* Il est une autre espèce de courbe plus favorable encore au mouvement des corps qu'entraîne la pesanteur : c'est la *cycloïde*, ou la courbe que décrit un point de la circonférence d'une roue qui roule sur un plan.

Soit AGE (fig. 23) un arc de cercle, et la droite AE sa corde. Soit encore ABE un arc de cycloïde, terminé aux mêmes points A et E, et embrassant l'arc de cercle (1). Le tout est supposé dans un plan vertical. On pourrait, en raisonnant comme nous avons fait pour le cercle, reconnaître d'abord que le mobile qui suit l'arc de cycloïde, se prête mieux à l'action de la pesanteur dans le commencement de sa chute, que celui même qui descend par l'arc de cercle ; d'où l'on peut inférer que l'accélération acquise compensant et au-delà le désavantage de la dernière partie de la courbe, ce mobile doit arriver au point le plus bas, non-seulement avant celui qui tombe par la corde AE, mais même avant le mobile qui décrit l'arc de cercle

---

(1) Cet art de cycloïde EBA est censé décrit par le point E de la demi-circonférence OCE, lorsqu'en roulant elle s'applique sur la droite OA.

AGE. Mais ces aperçus sont insuffisans sans doute, et ceux qui sont initiés dans la connaissance des calculs transcendans, doivent recourir ici aux livres des mathématiciens, qui leur prouveront que de toutes les courbes qui sont tracées sur le même plan vertical, et terminées par les mêmes points, et qui sont parcourues en vertu de la pesanteur, la cycloïde est celle qui exige le *moins* de temps ; ce qui l'a fait appeler *la courbe de la plus vîte descente.*

En physique on peut suppléer à ces démonstrations rigoureuses par des preuves plus matérielles. On a une pièce de bois, sur l'épaisseur de laquelle on a creusé trois gouttières, l'une en arc de cycloïde, la seconde en arc de cercle, et la troisième en ligne droite. Ces trois routes différentes commencent au même point, et se terminent aussi à un même point. L'appareil étant mis dans une position verticale, on laisse tomber à la fois du point le plus élevé trois balles de plomb ou de cuivre d'égale grosseur ; et l'on observe que celle qui a suivi l'arc de cycloïde, arrive *la première*, ensuite celle qui a décrit l'arc de cercle ; et enfin la balle qui descend par la droite qui sert de corde aux deux arcs, est celle qui arrive *la dernière.*

Ce n'est donc pas le chemin le *plus court* qui exige ici le *moins* de temps. Non-seulement l'arc de cercle a de l'avantage à cet égard sur sa corde : mais l'arc de cycloïde en a encore plus, comme le prouvent l'expérience et le calcul ; ce qui vient sans doute de ce que, dans sa partie supérieure s'éloignant moins de la direction verticale, le mobile qui la parcourt, acquiert plus de vitesse au commencement de sa chute, et parvient ainsi à franchir avec *plus de célérité* la partie inférieure de la courbe.

6. *Mouvement d'un corps pesant dans un canal curviligne.*

Un corps pesant qui est placé dans un canal curviligne dont le plan est vertical, descendra le long de ce canal, jusqu'à ce qu'il soit arrivé au point le plus bas; et s'il ne trouve point d'obstacle en cet endroit, il continuera à se mouvoir dans le canal, et commencera de s'élever dans la partie opposée. Ce qui le forcera de monter ainsi, c'est la vitesse qu'il a acquise en descendant par l'autre partie du canal. Il est visible que cette vitesse ne peut pas s'anéantir subitement, et sans cause : il faut de nécessité qu'elle persévère ou qu'elle produise quelque effet capable de l'épuiser. Or le seul effet qu'elle puisse produire ici, c'est de pousser le corps *de bas en haut* le long du canal. Mais ce mouvement ne peut avoir lieu, sans que la pesanteur n'y oppose une résistance toujours croissante, qui diminue peu à peu et réduit enfin à *zéro* toute cette vitesse acquise. Voilà donc quelle est la cause qui force le corps de *s'élever* par suite de l'action que la pesanteur a exercée sur lui, et quelle est aussi la raison qui l'empêche de monter au-delà d'une certaine hauteur.

Cette limite de l'élévation du mobile est facile à déterminer. Un corps qui est tombé par un arc de courbe, a toujours au point le plus bas une vitesse capable de le faire remonter à la hauteur d'où il est descendu. Donc notre mobile remontera dans le canal jusqu'à la même hauteur verticale qui mesure sa chute ; et là toute sa vitesse en avant étant épuisée, il sera ramené en arrière par la pesanteur, et retombera en sens contraire. Il remontera donc pour les mêmes raisons jus-

qu'au point d'où il était parti en premier lieu ; et les choses recommençant alors dans le même ordre, il ferait des *allées* et des *venues*, qui n'auraient point de fin, s'il n'y avait pas ici quelque obstacle inévitable, le frottement contre les parois du canal, qui empêche à chaque fois que l'élévation ne soit exactement égale à la descente. Les excursions du mobile perdent donc à tous momens de leur étendue, et il se trouve enfin ramené à l'état du repos, plutôt ou plus tard suivant les circonstances.

7. *Pression qu'exerce le corps pesant sur le plan ou la courbe qu'il parcourt.*

Lorsqu'un corps pesant descend par un plan incliné, il exerce sur ce plan une *pression*, qui est, comme on a dit, égale à *la composante de la pesanteur* perpendiculaire au plan ; et cette composante est elle-même égale *à la pesanteur absolue multipliée par la base du plan, et divisée par sa longueur*. Cette pression est la même sur tous les points du plan que parcourt le mobile, par la raison que le plan étant partout également incliné à la pesanteur absolue, il dérobe partout à cette force la même partie de sa puissance, et n'oppose nulle part aucun obstacle ni à la vitesse, ni à la direction que la *pesanteur relative* fait prendre au mobile.

Mais lorsqu'un corps descend par un canal curviligne, les différens points qu'il parcourt, s'écartant de plus en plus de la verticale, la composante de la pesanteur qui exprime la pression, devient aussi de plus en plus grande jusqu'au point le plus bas, où la courbe est parallèle à l'horizon, et où par conséquent la pression devient égale à la pesanteur absolue. Il est facile d'avoir la grandeur de la pression en un point quel-

conque du canal, en menant une *tangente* à ce point, et considérant le mobile comme posé là sur ce plan incliné. C'est ainsi que l'on trouve l'effort que supportent les différentes parties de la courbe à raison de ce qu'elles sont plus ou moins inclinées par rapport au plan horizontal. (1)

Quand un mobile descend par plusieurs plans de plus en plus inclinés, il se fait, comme on a vu, un choc à chaque changement d'inclinaison. Ce choc produit contre les plans que suit le mobile, un effort qu'il faut ajouter à la pression, qui sert à l'augmenter, et dont la grandeur dépend de la vitesse qu'il a au moment où il passe de l'un de ces plans sur le plan suivant.

Si l'on fait l'application de ce principe au mouvement d'un corps le long d'un canal curviligne, on voit que le mobile étant à chaque pas forcé de changer de direction, la pression qu'il exerce sur le canal, et qui vient de la pesanteur, doit être augmentée de celle qui résulte de l'assujettissement où il est de *courber sans cesse* sa route, dont la direction naturelle est la *ligne droite.* On trouve par le calcul que cette partie de la pression est égale *au quarré de la vitesse divisé par le rayon du cercle* qui se confondrait avec la petite portion de courbe que l'on considère ; ce qu'on appelle *rayon de courbure.* (2) On aura bientôt occasion de revenir sur ce dernier objet.

---

(1) En désignant la pression par P, et la base du plan par b, on a la formule : $P = \frac{gb}{l}$. g est toujours la gravité absolue, et l la longueur du plan.

(2) En appelant r ce rayon, et v la vitesse au point considéré, on a donc pour toute la pression à ce point : $P = \frac{gb}{l} + \frac{v^2}{r}$.

CHAPITRE IX.

DU PENDULE SIMPLE.

Au lieu de poser le mobile dans un canal curviligne, pour lui faire suivre dans son mouvement une ligne courbe, suspendons-le au bout d'un fil attaché par l'autre bout à un point fixe. D'abord le mobile ne pourra demeurer en repos, qu'autant qu'il se trouvera *verticalement* au-dessous du point de suspension : dans toute autre position, sa pesanteur ne sera point complétement détruite, et le corps devra obéir à cette force, et se mouvoir avec plus ou moins de vitesse.

Plaçons, par exemple, le mobile en A′ (fig. 24). La direction du fil qui le retient, étant CA′, celle de la pesanteur qui le sollicite, sera A′P. Ces deux directions n'étant point opposées, ne pourront se faire équilibre, et le mobile ne saurait demeurer en repos dans cette position. Pour trouver comment il doit se mouvoir, et avec quelle force, nous emploîrons toujours la même méthode, et nous décomposerons A′P en deux forces, l'une suivant la direction du fil, et l'autre perpendiculaire à cette direction. Si donc A′F représente l'intensité absolue de la pesanteur, ou l'espace qu'elle ferait parcourir dans l'unité de temps, A′K sera la force qui est détruite par la résistance du fil, et A′G celle qui doit avoir son effet, et produire le

mouvement. Le mobile commencera donc à se mouvoir suivant A'G, entraîné par une force qui *est à* la pesanteur absolue *comme* A'G *est à* A'F, ou bien *comme* A'D *est à* CA'; ou enfin *comme le sinus de l'angle d'écartement* A'CA *est au rayon*. Mais comme le fil est retenu, et qu'il est supposé *inextensible*, le mobile ne pourra pas suivre cette droite A'G : il sera au contraire détourné à chaque pas de sa direction précédente, et il descendra en suivant un arc de cercle A'A dont le centre est au point de suspension, et dont CA est le rayon.

Lorsqu'un mobile retenu par un fil, décrit ainsi un arc de cercle par l'effet de la pesanteur, l'action de cette puissance sur lui diminue encore de plus en plus à mesure que la *tangente* à la courbe approche davantage d'être horizontale : mais cela n'empêche pas que le mouvement ne *s'accélère* jusqu'au point le plus bas, par la raison que le mobile conserve partout les degrés de vitesse qu'il a acquis jusque-là. Il est vrai que cette accélération n'est pas *uniforme*, parce que les nouveaux degrés de vitesse ajoutés à chaque instant par la pesanteur, ne sont point égaux entre eux, et vont au contraire en diminuant.

Arrivé au point le plus bas de sa course, et se trouvant ainsi au-dessous du point de suspension, où la pesanteur n'a plus aucune prise sur lui, le mobile ne s'arrête pas pour cela : mais par les mêmes raisons que ci-dessus, il continue de se mouvoir en avant, et monte de l'autre côté suivant un arc de cercle semblable à celui qu'il a décrit en descendant. Parvenu à son *maximum* d'élévation, il descendra de nouveau pour décrire le même arc de cercle par un mouvement en sens con-

traire, et recommencer encore comme auparavant jusqu'à ce que la résistance de l'air et celle que le fil éprouve au point de suspension, aient entièrement détruit son mouvement, et le forcent enfin de se fixer dans la ligne verticale, qu'on appelle la *ligne de son repos.*

Les balancemens que fait le mobile en allant et revenant, s'appellent des *oscillations*, et le mobile lui-même se nomme *un pendule*. Le *pendule simple* que nous considérons ici, n'est autre chose qu'*un point pesant attaché à un fil sans pesanteur*. On a un pendule *physique* très-approchant de ce pendule *mathématique*, lorsqu'on fait usage d'une petite balle d'or ou de platine suspendue à un fil délié.

Le mouvement d'un pendule serait de sa nature un mouvement *perpétuel*, si les obstacles dont on a parlé, ne travaillaient sans cesse à l'anéantir, en empêchant que le mobile ne puisse à chaque oscillation, atteindre à toute la hauteur d'où il est descendu. Le pendule s'arrêtera donc au bout d'un temps plus ou moins long, selon qu'on aura eu soin d'affaiblir plus ou moins les obstacles *inévitables* qui s'opposent à son mouvement. La résistance de ces obstacles peut être diminuée au point que le mouvement du pendule dure pendant plusieurs heures.

1. *Des pendules de longueurs différentes.*

Le mouvement d'oscillation du pendule est une chose très-importante en mécanique, et qui demande à être étudiée avec soin. Cherchons d'abord quel rapport il y a entre les durées des oscillations de deux pendules de longueurs différentes.

Soient D et D′ deux points pesans, attachés à deux fils différens CD et CD′ (fig. 25). Supposons qu'ils soient écartés l'un et l'autre de la verticale d'*une même quantité angulaire.* Il est visible que si on les abandonne au même instant à la pesanteur, les tangentes DB et D′B′ étant *parallèles*, l'action de cette force sera la même sur l'un et sur l'autre, et qu'ils commenceront à se mouvoir avec une égale vitesse. La même chose aura lieu sur tous les points correspondans des arcs qu'ils parcourent, et la pesanteur éprouvera sur chacun d'eux les mêmes décroissemens : seulement l'arc DA étant plus long que l'arc D′A′, il faudra *plus de temps* pour décrire le premier de ces arcs que pour décrire le dernier. Il s'agit donc de trouver le rapport de ces temps.

Puisque les arcs décrits par les deux mobiles, sont des portions *semblables* de leurs circonférences, leurs longueurs sont donc entre elles dans le même rapport que leurs cordes; et puisque la pesanteur agit de même sur l'un et sur l'autre, les temps nécessaires pour parcourir les arcs, seront dans le même rapport que les temps pour parcourir les cordes. Mais celles-ci qui sont parallèles, peuvent être considérées comme des plans également inclinés à l'horizon; et dans ces sortes de plans, les temps de la chute suivent *la loi des racines quarrées des longueurs de ces plans.* Ce sera donc aussi la loi que suivront les temps nécessaires pour décrire les arcs. Enfin si l'on observe que des arcs semblables pris dans des circonférences différentes, sont entre eux comme leurs rayons, on trouvera pour dernier résultat, que *deux pendules de longueurs différentes, et qui sont également écartés de la verti-*

cale, font leurs oscillations dans des temps proportionnels aux racines quarrées de leurs longueurs.

Si l'on prend deux pendules, dont les longueurs à partir du point de suspension jusqu'au centre du point pesant, soient dans le rapport d'*un à quatre*; le plus court de ces pendules mettra *la moitié* moins de temps à décrire son arc, et il fera *deux* oscillations, tandis que l'autre en fera *une*.

2. *Des oscillations de grandeurs différentes.*

Concevons un pendule CA (fig. 25) d'abord élevé jusqu'en D, et ensuite seulement jusqu'en E, et comparons les temps qu'il lui faudra dans les deux cas pour descendre jusqu'en A. Ces temps dépendront évidemment de la *longueur* des arcs à parcourir, et de l'*intensité* de la pesanteur au commencement de la chute. Si l'on suppose que AE est la *moitié* de AD, le mobile en partant du point E, aura *moitié* moins de chemin à faire; et si la force qui agit sur lui en E, était la *même* qu'au point D, il ne lui faudrait pour décrire AE, que la *moitié* du temps nécessaire pour descendre par DA. Les deux temps seraient *égaux*, si la force en E était la *moitié* de celle qui agit en D. Mais aucune de ces deux suppositions n'a lieu : la force accélératrice au point E est plus petite que celle qui agit au point D, et elle est plus grande que la moitié de celle-ci, comme il est facile de s'en convaincre. (1) Il suit de là, que le

(1) En effet ces forces sont entre elles comme les sinus des angles DCA et ECA, ou ce qui est la même chose des arcs DA et EA : or le sinus d'un arc, moitié d'un autre arc, est plus que la moitié du sinus de celui-ci. Donc la force accélératrice en E, est plus que la moitié de la force accélératrice en D.

mobile emploîra moins de temps pour descendre par un arc plus court, sans que la durée de la chute suive néanmoins le rapport des arcs décrits.

Les oscillations d'un même pendule deviennent donc plus promptes à mesure que les arcs parcourus sont d'une moindre étendue ; et comme la cause qui produit cette différence dans la durée des oscillations, diminue nécessairement lorsque les arcs deviennent plus petits, l'on peut donc dire, que les oscillations d'un pendule approchent d'autant plus de l'égalité pour la durée, qu'elles se font dans de plus petits arcs. On est dans l'usage de considérer ces oscillations comme *égales* en effet, lorsque le mobile ne s'écarte que très-peu de part et d'autre de la ligne verticale : ce qu'on exprime en disant, qu'elles sont alors *isochrones*.

3. *Isochronisme des oscillations.*

Ce n'est pas d'une manière rigoureuse que les petites oscillations sont d'une égale durée dans le cercle : mais il est une courbe où cette égalité est parfaite, quelle que soit l'étendue des arcs décrits : c'est la *cycloïde*. Ce qui procure à cette courbe la propriété dont il est ici question, c'est que la force accélératrice de la pesanteur y est à chaque point *proportionnelle* à l'arc qui reste à décrire pour arriver jusqu'au point le plus bas. Cette force étant donc *double*, lorsque l'arc à parcourir est *double*, il suit que le mobile arrivera toujours au point le plus bas dans *le même espace* de temps. (1)

---

(1) Soit (fig. 26) la cycloïde ABE engendrée par le demi-cercle FA'B'E roulant sur la droite FX. Soient aussi deux

Cette parfaite égalité dans la durée des oscillations qui se font suivant une cycloïde, avait fait penser à mesurer le temps par le moyen d'un pendule, qui aurait décrit dans ses oscillations des arcs de cycloïde. En effet, il est évident que la première qualité d'un instrument propre à donner une juste mesure du temps, c'est la *parfaite uniformité* de son mouvement. Or, un pendule qui parcourt des arcs de cycloïde, faisant ses oscillations grandes et petites, dans des temps qui sont toujours d'une égale durée, il n'était question pour avoir des intervalles de temps constamment égaux entre eux, que de faire décrire au pendule des arcs de cette espèce. C'est à quoi l'illustre *Huyghens* parvint de la manière suivante.

Si l'on enveloppe une cycloïde avec un fil, et qu'en détachant un des bouts du fil, on développe ce fil en le tenant toujours également tendu, *le bout mobile* décrira une cycloïde semblable à la première. *Huyghens* imagina donc de faire la verge du pendule

---

mobiles placés sur la cycloïde, l'un en A, et l'autre en B. Par la nature de cette courbe, les tangentes à ces points sont parallèles aux cordes correspondantes A'E, B'E du cercle générateur. Les forces accélératrices en A et en B, sont donc égales à celles sur les plans inclinés A'E, et B'E. Mais celles-ci, sont *proportionnelles* aux longueurs de ces cordes, qu'on sait qui sont parcourues dans des temps égaux. Ainsi les forces en A et en B sont *comme* A'E, et B'E. D'un autre côté les arcs cycloïdaux AE, BE sont le *double* des cordes A'E, B'E. Donc les forces accélératrices qui sont *comme* ces cordes, sont aussi *comme* les arcs de la cycloïde; et par conséquent les temps nécessaires pour parcourir ces arcs seront égaux entre eux.

flexible, et de le faire osciller entre deux pièces taillées en cycloïdes, de manière que la verge s'appliquât alternativement sur l'une et sur l'autre pièce. Par ce moyen le pendule décrit des arcs de cycloïde, et fait par conséquent ses oscillations en des temps parfaitement égaux. Mais la difficulté d'avoir une verge d'une flexibilité suffisante, et les altérations inévitables que les lames cycloïdales sont dans le cas d'éprouver, n'ont pas permis qu'on fît usage de cette ingénieuse invention.

Cependant l'idée de mesurer le temps par les oscillations du pendule n'a pas été abandonnée pour cela. On a observé que la cycloïde au point le plus bas se confondait sur une petite étendue, avec le cercle décrit d'un *rayon double du diamètre* du cercle générateur de cette cycloïde. On a donc senti qu'en faisant faire au pendule de *très-petites* oscillations dans le cercle, ces oscillations se feraient aussi en des temps sensiblement égaux. C'est en effet ce qui a lieu, et qui se pratique depuis assez long-temps. Les oscillations des pendules sont donc *isochrones*, bien qu'elles se fassent dans des arcs de cercle, pourvu qu'elles remplissent la condition essentielle d'être renfermées dans une très-petite étendue, comme de *trois à quatre* degrés à droite et à gauche de la verticale.

4. *Durée des très-petites oscillations.*

La vitesse d'un point pesant qui descend par un arc de cercle, variant inégalement à chaque pas qu'il fait, il est visible qu'on ne pourra trouver que par le calcul, le temps qu'il lui faut pour parcourir cet arc. Mais ici le calcul même ne donne pour ce temps

qu'une expression composée d'un nombre indéfini de termes, qui vont à la vérité en *décroissant* de grandeur, mais dont on ne peut avoir rigoureusement la somme. Le temps demandé ne peut donc se trouver que par *approximation.*

Si les oscillations du pendule se font dans de très-petits arcs, ce qui est nécessaire, comme on vient de dire, pour qu'elles soient d'*égale durée*, on a trouvé pour ce cas que le temps d'une oscillation est égal *à la racine quarrée de la longueur du pendule divisée par celle de la gravité, et multipliant ce résultat par le nombre qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre.* On sait que ce nombre, sous sa forme la plus simple, est $\frac{22}{7}$. Ce temps est rigoureusement celui des oscillations dans la cycloïde. (1)

En examinant la règle qu'on vient d'établir, et qui est relative aux très-petites oscillations dans le cercle, les seules dont on fasse usage, et que nous ayons à considérer ici, on voit d'abord que la *durée* de ces oscillations dépend de la *longueur* du pendule; ce que nous avions déja reconnu; et en second lieu qu'elle tient aussi, mais en sens inverse, à l'*intensité* de la pesanteur. Un pendule de longueur donnée, doit tomber *plus vite* là où cette force est *plus grande*, et *plus lentement* là où elle est *moindre.* Réciproquement la durée plus ou moins grande des oscillations suppose dans la gravité une action plus faible ou plus forte, et

(1) La formule pour les très-petites oscillations est: $t = K\sqrt{\frac{l}{g}}$. K est le rapport de la circonférence au diamètre, ou le nombre 3,1416.

c'est au pendule que nous devons la connaissance des variations que la pesanteur éprouve sur les différentes parties de la terre, et dont on a parlé plus haut. Un même pendule porté successivement en divers lieux plus ou moins éloignés de l'équateur, ne marchera pas partout avec la même vitesse. Il oscillera plus lentement dans les régions équatoriales, et son mouvement s'accélèrera en allant vers les pôles. Cette belle expérience a servi à nous faire connaître la véritable figure de la terre. (*)

5. *Du Pendule à secondes.*

On peut facilement en faisant usage de la règle ci-dessus, et lorsque l'intensité locale de la pesanteur est connue, déterminer la *longueur de pendule* nécessaire pour que les oscillations se fassent en *une seconde* de temps. Cette longueur est égale *à la gravité divisée par le quarré du rapport de la circonférence au diamètre*. Si le lieu choisi est Paris, où la gravité vaut 30,2 pieds, on trouvera qu'à cette latitude la longueur du pendule qui bat les secondes, est en mesures anciennes, de $3^{pi.}\ 0^{pou.}\ 8^{l.},60$. La gravité exprimée en mètres étant au même lieu de $9^{m},809$, la longueur du pendule à secondes est en unités de cette espèce, de $0^{m},994$. (1)

Mais il n'est pas nécessaire de connaître l'intensité de la pesanteur, pour déterminer la longueur du pendule

(*) Voyez l'*Étude du Ciel*, Chapitre VII.

(1) En mettant le nombre 1 à la place de t dans la formule précédente, on en tire : $l = \frac{g}{K^2}$. C'est la longueur du pendule qui fait ses oscillations dans l'unité de temps.

qui fait ses oscillations dans un temps donné. En effet soient deux pendules placés dans un même lieu, et dont les longueurs sont différentes. Les durées de leurs oscillations seront différentes aussi, puisque nous savons qu'elles suivent le rapport des *racines quarrées* de ces longueurs. D'un autre côté les *nombres* des oscillations que chacun de ces pendules fait dans le même temps, étant en *raison inverse* de leurs *durées*, les quarrés de ces nombres seront *réciproquement* comme les longueurs des pendules. Ainsi une de ces longueurs étant connue, il sera facile d'avoir l'autre, au moyen du nombre des oscillations que ces pendules font dans le même temps. (2)

Si l'on prend donc un pendule dont on ait bien exactement mesuré la longueur, et qu'on le fasse osciller librement pendant un certain temps comme d'une heure : si l'on a eu soin d'ailleurs de compter fidellement toutes les oscillations qu'il a faites dans ce temps-là ; on en pourra conclure sans peine la véritable longueur du pendule qui bat les secondes. Celui-ci en effet devant faire 3600 oscillations dans une heure, sa longueur pour cela devra être égale *à la longueur du pendule mis en expérience, multipliée par le quarré du nombre d'oscillations qu'il a faites, et divisée par*

---

(2) En appelant l et l' les longueurs des deux pendules, on a d'abord, $t = K \sqrt{\frac{l}{g}}$, et $t' = K \sqrt{\frac{l'}{g}}$. D'où l'on conclut, $t : t' :: \sqrt{l} : \sqrt{l'}$. Soient n et n' les nombres d'oscillations faites dans le même temps, on aura, $n : n' :: t' : t :: \sqrt{l'} : \sqrt{l}$. Donc enfin, $n^2 : n'^2 :: l' : l$; et $l = \frac{l' n'^2}{n^2}$.

le *quarré de* 3600. C'est ainsi qu'on a trouvé le résultat donné tout-à-l'heure.

On peut encore se servir de la même règle pour connaître la valeur de la gravité dans le lieu où est placé le pendule. Car en supposant que le temps est d'une seconde, on trouve que la gravité est égale *à la longueur du pendule multipliée par le quarré du nombre qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre.* Or on peut comme on vient de voir, déterminer la longueur du pendule à secondes indépendamment de la gravité. Il est donc facile de trouver pour un lieu donné, la valeur de celle-ci, ou *la vitesse* que la pesanteur fait passer en une seconde de temps, dans un corps qui lui obeit librement. Le résultat donné par cette méthode, s'est trouvé tout-à-fait d'accord avec celui que l'expérience directe avait fourni; et c'est ainsi pareillement qu'on a reconnu les variations que la pesanteur éprouve sur les différentes parties de la terre. (3)

En faisant osciller des pendules de *même* longueur, et de nature et de poids *différens*, on a eu la confirmation du principe établi plus haut, que *la pesanteur est la même dans tous les corps terrestres.* Car on n'a remarqué aucune différence dans la durée de leurs oscillations; et il est visible que si la pesanteur était plus grande dans les uns que dans les autres, ceux-là seraient tombés plus vîte, et ceux-ci plus lentement.

---

(3) La formule ci-dessus donne encore dans la supposition que $t = 1$, $g = K^2 l$. Alors l est la longueur du pendule à secondes, trouvée dans le numéro précédent.

La pesanteur étant le résultat de la puissance attractive du globe sur les corps qui sont dans son voisinage ; et l'attraction étant proportionnelle à la masse, on a pu encore par le moyen du pendule se faire une idée de la masse et de la densité de notre terre. On a observé qu'un pendule libre et en repos, placé dans le voisinage d'une montagne, ne se tenait pas exactement dans la ligne verticale, et qu'il déclinait quelque peu vers cette montagne. Cet écart qui est dû à l'attraction *latérale* du mont, a mis dans le cas de comparer la masse de celui-ci avec la masse du globe terrestre ; et l'on en a conclu que la masse de la terre était *quatre fois et demie* aussi grande que celle d'un globe pareil qui serait tout d'eau. (4)

La longueur du pendule à secondes étant susceptible d'une détermination rigoureuse, et ne paraissant pas devoir éprouver par le laps du temps aucune variation, quelques-uns avaient proposé de prendre cette longueur en un lieu convenu, pour *unité principale et base de toutes les mesures.* Le pendule à secondes pouvait donc fournir une mesure *fixe*, *invariable*, *impérissable*, et qu'on aurait pu toujours vérifier, et retrouver au besoin. Mais on a cru devoir préférer une autre base également *fixe* et *inaltérable*, et qui eût avec la grandeur de notre globe une relation connue. C'est le *mètre*, qui est, comme on sait, la *dix-millionième partie*

---

(4) Il existe sur l'attraction des montagnes un superbe travail exécuté par M. le Baron de Zach, et qu'il a fait connaître au public par un très-bel ouvrage imprimé chez Seguin à Avignon. Cette attraction y est démontrée de la manière la plus rigoureuse.

du quart du méridien terrestre; on peut d'ailleurs, retrouver la longueur du mètre par celle du pendule à secondes qui est à Paris de 0m.,994.

6. *Application du Pendule aux horloges.*

L'isochronisme des oscillations du pendule a fait imaginer de l'employer pour régulariser le mouvement dans les horloges. La première idée de cette utile application est due encore au savant *Huyghens*. Depuis long-temps on avait substitué aux *horloges d'eau* ou *clepsydres* des anciens, des horloges à roues et à poids, dans lesquelles le moteur est en effet un poids plus ou moins lourd, que la pesanteur entraîne, et qui met ainsi en mouvement toutes les parties du rouage. La gravité, comme on a vu, peut être réduite à une aussi petite force qu'on voudra : mais cette petite force n'en est pas moins une *force accélératrice constante*, et qui ne souffre point d'interruption. Elle doit donc communiquer au poids une vitesse toujours croissante, et qui l'amènerait bientôt au terme de sa chute. Le mouvement du rouage serait donc *précipité*, et manquerait de cette *uniformité* qui est si nécessaire lorsqu'il s'agit de mesurer le temps.

On avait imaginé divers moyens pour ralentir la chute du poids, et donner une certaine régularité au mouvement de l'horloge. Celui qu'on employait le plus communément, et qui est encore en usage dans bien des circonstances, consistait en un volant tournant sur son axe, et frappant l'air avec ses ailes. C'est le poids, qui en descendant fait tourner le volant sur lui-même, et le mouvement de celui-ci est plus rapide, quand l'autre tombe plus vîte. Or, la résistance des fluides crois-

sant en raison *doublée* de la vitesse, bientôt la résistance de l'air devient égale à l'accélération que la pesanteur fait passer dans le poids : la chute de celui-ci d'abord précipitée, se fait ensuite d'une manière plus uniforme ; et le mouvement du rouage prend une certaine régularité.

Mais cette régularité qui était suffisante pour les besoins ordinaires de la vie, ne l'était pas à beaucoup près pour le service de l'astronomie. Il est aisé de sentir que, soit à cause de l'inégale résistance du rouage, soit à cause des fréquentes variations que l'air éprouve dans sa densité, le mouvement de l'horloge la mieux soignée devait être sujet à bien des inégalités. Il fallait donc un *modérateur* plus constant, et d'une régularité plus parfaite.

Huyghens trouva dans le pendule ce modérateur désiré. Il ajouta aux différentes pièces du rouage une roue à dents obliques, qu'on appelle *roue de rencontre*, et qui est menée par le rouage, et de plus une pièce qui en est indépendante, et qui est façonnée en forme d'*ancre*, dont elle porte le nom. Celle-ci est liée à un pendule, dont elle suit les balancemens. Quand le pendule est en repos, les palettes de l'ancre se trouvent engagées entre les dents de la roue de rencontre, et tout mouvement est arrêté. Le poids que nous ne supposons pas assez lourd pour surmonter cette résistance, demeure suspendu, et l'action de la pesanteur se trouve ainsi annulée. Mais si l'on vient à tirer le pendule hors de son repos, une des palettes de l'ancre se dégage, la roue de rencontre devient libre pour un moment, et le poids qui n'est plus retenu, tombe d'une petite quantité. Ce mouvement ne dure

qu'un instant, parce que l'autre palette l'arrête subitement; et il faut pour qu'il puisse recommencer, que celle-ci se dégage de même : ce qui arrive quand le pendule s'élève du côté opposé. Or le pendule une fois mis en mouvement continue à faire ses oscillations en des temps égaux, de façon que les dents de la roue se dégagent alternativement à des intervalles égaux, et que le mouvement du rouage a toute la régularité désirable.

Tel est le mécanisme ingénieux imaginé par *Huyghens*, pour donner de la régularité aux horloges. On lui a donné le nom d'*échappement*, parce que son objet est de faire échapper les dents de la roue de rencontre l'une après l'autre et dans des intervalles égaux.

Il est facile de voir que dans cette invention la pesanteur se sert de correctif à elle-même. C'est dans le poids que réside la *force motrice* : mais comme il est arrêté à chaque instant, et que l'action de la pesanteur sur lui se trouve annulée à tout moment, ce poids est donc toujours comme s'il commençait seulement à tomber : son mouvement n'est pas plus accéléré à la fin qu'au commencement de sa chute. D'un autre côté les oscillations du pendule étant d'égale durée, les intervalles pendant lesquels le rouage est libre sont aussi égaux, et les actions successives de la gravité sur le poids moteur ne peuvent manquer d'être parfaitement égales entre elles. Ce poids descend donc à chaque instant d'une même quantité, et ne s'arrête que lorsqu'il est arrivé au point le plus bas. Quant au pendule, s'il continue ses oscillations pendant tout ce temps malgré les divers obstacles que nous connaissons, c'est que l'action du poids au moment où il est

arrêté, se transmet jusqu'à lui par la roue de rencontre, et lui restitue ainsi à chaque fois ce que ces obstacles ont pu lui faire perdre.

7. *Vitesse angulaire du pendule.*

La vitesse d'un pendule varie, comme on a dit, à chaque point de l'arc qu'il décrit. Il est facile néanmoins de trouver cette vitesse pour un point donné de cet arc, lorsqu'on connaît la position du point d'où le mobile est parti. En effet cette vitesse est toujours égale à celle qu'un corps pesant acquerrait, en tombant de la hauteur *verticale* qui sépare les deux points donnés. Ainsi le pendule parti du point D (fig. 25) a, lorsqu'il est arrivé en E, une vitesse *due à la hauteur* GF, qui est la différence entre CF et CG. Mais en considérant CD comme le *rayon*, CF s'appelle le *cosinus* de l'arc AE, ou de l'angle ACE; et CG est le *cosinus* de l'angle initial ACD. Donc la vitesse au point E est la même que celle d'un corps pesant tombé d'une hauteur égale *à la différence de ces cosinus.* Cette vitesse est celle qu'on appelle *vitesse angulaire* du mobile, puisqu'elle dépend de l'angle qu'il fait avec la verticale, et qu'elle fait connaître de quelle manière il s'en approche.

La vitesse qu'on vient de trouver, se fait sentir dans le sens des tangentes à l'arc. Si l'on veut l'apprécier relativement au point de suspension C, c'est-à-dire, mesurer l'effort que fait le pendule pour tourner autour de ce point : il est évident que cet effort sera d'autant plus grand, que le pendule aura plus de longueur. Il faudra donc multiplier la vitesse angulaire par la distance du mobile au centre du mouvement. C'est ainsi qu'on aura sa *vitesse de rotation.* La vitesse *angulaire* est la

même pour tous les points de CE : mais la vitesse de rotation est plus grande pour les points plus éloignés du point C. (1)

CHAPITRE X.

DU MOUVEMENT EN LIGNE COURBE.

Lorsqu'un corps n'est soumis qu'à *une seule force*, soit que cette force soit *instantanée*, comme une impulsion, soit qu'elle soit *continue* comme la pesanteur, ce corps se meut constamment suivant une *ligne droite*, qui est la direction de la force qui agit sur lui. Le mobile suit encore une ligne droite, lorsqu'il est poussé en même temps par *deux*, *ou un plus grand nombre de forces*, dont les actions simultanées ne durent qu'un instant ; mais si on le suppose soumis à la fois à une force d'impulsion momentanée, et à une force continue faisant un angle avec celle-là, et dirigée

(1) Soit l la longueur de CE, et v la vitesse angulaire du point éloigné de C de l'unité de distance, lv sera la vitesse absolue du point E; et comme d'ailleurs elle est égale à celle par GF, on aura, $lv = \sqrt{2g \times GF} = \sqrt{2g(CF - CG)}$; et en désignant ces cosinus par d et d', et prenant l pour rayon, il vient : $lv = \sqrt{2gl(d - d')}$. On tire de là la vitesse angulaire v, $v = \sqrt{\frac{2g(d - d')}{l}}$. lv est la vitesse de rotation du point E.

constamment vers un même point, alors son mouvement ne peut plus se faire suivant une seule et même droite : mais le mobile est forcé à chaque instant de changer de direction, et de décrire une *ligne courbe*. C'est cette espèce de mouvement que nous nous proposons de considérer ici.

1. *Origine du mouvement en ligne courbe.*

Soit un point mobile lancé dans la direction AR (fig. 27), tandis qu'il est en même temps sollicité par une force continue dirigée vers le point S. Soient AB et AC les espaces que les deux forces feraient parcourir *séparément* au mobile dans l'unité de temps. Le mobile, comme on sait, arrivera en D dans cette même unité, et continuerait à se mouvoir le long de AT avec une vitesse uniforme, si la force suivant AS n'agissait pas davantage. Mais si parvenu au point D, il reçoit de celle-ci une action nouvelle selon DS ; en construisant sur DE égal à AD, et sur DF égal à AC, un second parallélogramme, on trouve que le mobile au bout de la *seconde unité*, sera arrivé en G, et aura parcouru la droite DG, qui est inclinée à la précédente AD.

Si l'action de la seconde force cessait là, le mouvement continuerait de se faire uniformément sur le prolongement de DG. Mais si cette action recommence à ce point G dans le sens GS, alors en opérant comme tout à l'heure, on aura une troisième droite GK inclinée encore à DG, pour exprimer la direction et la vitesse du mobile pendant la *troisième* unité de temps, et ainsi de suite. On voit donc que le point mobile dans la supposition présente, suivrait les côtés AD, DG, GK, etc. d'un *polygone*. Mais si l'on conçoit que

la force dirigée en S agit d'une manière continue et sans interruption, alors les *diagonales* suivies à chaque instant seront *infiniment courtes*, et il résultera de leur suite *une ligne courbe*, dont la nature dépendra du *rapport* existant entre les deux forces, et de l'*angle* qu'elles font entre elles au commencement du mouvement. Examinons les principaux cas qui peuvent se présenter ici.

2. *Du mouvement dans le cercle.*

Supposons que les directions primordiales des forces sont *perpendiculaires* entre elles, et cherchons quel est le rapport qu'elles doivent avoir, pour que la courbe décrite soit une circonférence de cercle, et que le mobile soit ainsi maintenu constamment à une égale distance du point où l'une des deux forces est dirigée.

Soit O (fig. 28) ce point central, AR et AO les directions des deux forces au premier instant, AB la vitesse d'impulsion, AC l'espace que la force continue ferait parcourir dans la première unité de temps. D'après l'énoncé du problème proposé, il faut que BD, qui est la quantité dont le mobile se serait éloigné du centre dans le premier instant par l'effet de la force d'impulsion, *soit égal* à AC, qui est la quantité dont il s'en serait approché dans le même temps, par la seule action de la force continue. Or de cette égalité supposée, il est facile de conclure, que pour que l'effet désiré ait lieu, il est nécessaire que *la force continue soit égale au quarré de la vitesse d'impulsion divisé par la distance au centre.* (1)

---

(1) Si l'on suppose l'arc AD très-petit, AC égalera BD. Mais $BD = BO - OD = \sqrt{AO^2 + AB^2} - AO$. Donc

Si l'on rapporte le résultat qu'on vient de trouver, à la force d'impulsion, on trouve que la courbe décrite sera une circonférence de cercle, si *la vitesse imprimée au mobile par cette force, est égale à la racine quarrée de la distance* AO *multipliée par la vitesse que la force continue communique dans l'unité de temps.*

Mais cette force continue ou accélératrice quelconque peut être comparée à la pesanteur qui est une force de cette espèce, que nous connaissons suffisamment ; et l'on trouve alors, qu'afin que le mobile soit forcé de décrire une circonférence de cercle, il est nécessaire, que *la vitesse d'impulsion* soit à *celle d'un corps tombé d'un demi* AO, comme *la racine quarrée de la force accélératrice* est à *la racine quarrée de la pesanteur* : ou plutot il faut que *la hauteur due à la vitesse initiale* soit *au demi rayon*, comme *la force accélératrice* est à *la force de la pesanteur.* Telle est la manière la plus simple d'exprimer la condition nécessaire pour que, les deux forces étant d'ailleurs perpendiculaires entre elles, le mobile soit maintenu constamment à une égale distance du point central. (2)

$AC + AO = \sqrt{AO^2 + AB^2}$. Soit $AC = \frac{1}{2} f$, $AO = r$, et $AB = u$, il viendra : $\frac{1}{2} f + r = \sqrt{r^2 + u^2}$. D'où l'on tire: $f(\frac{1}{4} f + r) = u^2$; et en négligeant $\frac{1}{4} f$, qui est nul vis-à-vis de r, on a enfin : $fr = u^2$, ou $f = \frac{u^2}{r}$.

(2) Un corps qui tombe d'une hauteur égale à $\frac{1}{2}$ r, acquiert une vitesse $v = \sqrt{gr}$. Donc en comparant cette vitesse avec la vitesse u ci-dessus, on a, $u^2 : v^2 :: f : g$. Si l'on appelle h la hauteur due à la vitesse u, $\frac{1}{2}r$ étant celle qui produit la vitesse v, on a enfin, $f : g :: h : \frac{1}{2} r$; ce qui est l'expression abrégée de la condition énoncée dans le texte.

Lorsqu'un mobile décrit une circonférence de cercle, en vertu des actions combinées de deux forces telles qu'on vient de les trouver, sa vitesse est *la même* sur tous les points de sa révolution, et égale à la vitesse d'impulsion. Car le rayon est partout perpendiculaire à la circonférence ; et le mobile se trouvant à chaque instant dans les mêmes circonstances, sa vitesse doit partout conserver le même rapport avec la force dirigée au centre. Son mouvement sur la circonférence se fait donc d'une manière tout-à-fait *uniforme*.

Au lieu de supposer le corps libre, et sollicité en même temps par deux forces dont l'une est constamment dirigée vers un même point, on pourrait supposer que le mobile est retenu par un fil attaché à un point fixe, autour duquel il peut se mouvoir. Alors si l'on communique à ce corps une impulsion dans un sens perpendiculaire à la longueur du fil, le mobile décrira encore une circonférence de cercle. Voici de quelle manière il faut expliquer ce qui se passe dans cette circonstance.

Le mobile étant frappé dans le sens AB (fig. 29), et ne pouvant pas suivre cette direction, parce qu'il est retenu par le fil *inextensible* AC, il se trouvera forcé de décrire l'arc de cercle AD. Il faudra donc considérer la force d'impulsion AB, comme composée de deux autres forces, l'une AE dans la direction du fil, et détruite par la résistance de ce fil, ou plutôt du point fixe où il est attaché, et l'autre AD qui doit avoir son effet. On construira donc sur AB comme diagonale le parallélogramme ABDE, qui donne AD pour la vitesse effective du mobile ; cet arc AD décrit

dans un temps infiniment court, pouvant être considéré comme une ligne droite.

La vitesse imprimée par la force d'impulsion, demeurant toujours la même, et sans qu'il soit besoin que cette force réitère son action, parce que nous faisons abstraction ici de toute résistance étrangère ; ce sera encore la même chose dans les instans suivans, de façon que le mobile parcourra une courbe circulaire par l'effet combiné d'une force impulsive et d'une résistance centrale. Cette résistance, comme l'observe *Bezout*, produit ici le même effet qu'une force continue, qui agirait suivant la direction du fil, et détruirait à chaque instant l'effort que fait le mobile pour s'eloigner du point fixe.

Puisque le mobile dans le cas présent, se meut suivant une circonférence de cercle, il faut 1.° que sa vitesse soit *uniforme*, et la même sur tous les points de sa révolution ; 2.° que la force par laquelle il tend à s'éloigner du centre de son mouvement, force égale à la *tension* du fil qui le retient, *soit* à la pesanteur, *comme* la hauteur due à la vitesse d'impulsion *est à* la moitié du rayon du cercle qu'il décrit. Ce n'est point ici la force accélératrice qui détermine la vitesse de son mouvement : mais c'est la vitesse du mouvement qui produit la tension du fil, et qui donne par conséquent la mesure de la force employée pour retenir le mobile, force qui tient lieu ici de la force accélératrice constamment dirigée vers un même point.

3. *De la force centrifuge dans le cercle.*

Un corps mis en mouvement tend par son inertie à persister dans la première direction qui lui a été

donnée. Lors donc qu'il se meut en ligne courbe, il ne peut ainsi changer à chaque instant de direction, sans faire un continuel effort contre la cause quelle qu'elle soit, qui le force à tous momens de quitter la route qu'il suivait, pour en prendre une autre inclinée à celle-là. Cet effort que fait un mobile pour continuer à marcher en ligne droite, effort qui tend à l'éloigner du point vers lequel le tire la force continue, s'appelle *force centrifuge*; et l'on donne par opposition le nom de *force centripète* à la force qui tend à le ramener vers le centre du mouvement. On les appelle toutes deux *les forces centrales*, parce qu'on rapporte leur action à ce point fixe et central. Dans le cercle ce point est effectivement le centre de la courbe décrite : il n'en est pas tout-à-fait de même pour d'autres courbes.

Puisque le mobile qui décrit un cercle, est dans tous les points de sa révolution, également éloigné du centre, et que sa vitesse est partout la même, on peut en conclure, que dans le cercle *la force centrifuge est toujours égale à la force centripète*, et que l'une et l'autre dans un cercle donné, n'éprouvent aucune variation pendant toute la durée des révolutions.

On a trouvé tout-à-l'heure la valeur de la force centripète dans le cercle : c'est donc aussi celle de la force centrifuge, ou la mesure de l'effort que le mobile fait continuellement pour s'éloigner du centre de sa révolution. Cet effort est donc égal *au quarré de la vitesse divisé par le rayon du cercle décrit.* Mais on peut avoir d'autres expressions de cette force centrifuge, si l'on fait entrer en considération le temps nécessaire pour achever une révolution.

Le mouvement d'un corps qui décrit une circonfé-

rence de cercle est un mouvement uniforme. On aura donc la durée d'une révolution, *en divisant la circonférence par la vitesse.* Or la vitesse dans le cercle est connue. Donc en substituant sa valeur, on trouvera que la force centripète, et par conséquent la force centrifuge qui lui est égale, vaut *le quarré de la circonférence divisé par le rayon multipliant le quarré du temps.*

On trouve encore en faisant disparaître le rayon, et rétablissant la vitesse, que cette force est égale au *double de la vitesse multipliée par le rapport de la circonférence au diamètre, et divisé par la durée d'une révolution* (1). On peut, selon les circonstances, faire usage de l'une ou l'autre de ces expressions, qui conviennent également à la force centrifuge considérée dans le cercle.

L'on peut actuellement comparer de différentes manières les forces centrifuges de deux mobiles, qui circulent autour du même point, ou bien autour de deux points différens. La première des valeurs qu'on vient de donner, nous apprend que les *forces centrifuges sont entre elles comme les quarrés des vitesses, divisés par les rayons des circonférences décrites.* La

---

(1) La formule du mouvement uniforme étant $T = \frac{E}{V}$; si l'on met pour E la circonférence dont le rayon est r, et pour V la vitesse qui a lieu sur le cercle, il vient, $T = 2K \sqrt{\frac{r}{f}}$; et par conséquent, $f = \frac{4K^2 r}{T^2}$. Enfin si dans l'expression du temps, l'on met pour r sa valeur tirée de l'équation précédente, on a pour troisième expression de la force centrifuge, $f = \frac{2Ku}{T}$.

seconde nous fait voir, que ces forces sont *comme les rayons des circonférences, divisés par le quarré des temps employés à les décrire,* ce qu'on appelle les *temps périodiques.* Enfin on tire de la dernière valeur donnée, que les forces centrifuges sont *comme les simples vitesses divisées par les temps périodiques.*

Lorsqu'un corps se meut suivant une circonférence de cercle, il lutte donc continuellement contre la puissance qui le retient, et l'effort qu'il fait contre elle, augmente comme le *quarré* de sa vitesse. Si la grandeur de la force centripète est donnée, et *constante* pour la distance à laquelle est placé le mobile, il n'y a qu'*un certain degré de vitesse* primitive qui puisse produire un mouvement circulaire, et maintenir le mobile à la même distance. Mais si la force centripète est remplacée par la résistance variable d'un fil, ou par la *force de cohésion*, qui est celle qui tient unies les particules d'un même corps, ou enfin par une autre force quelconque susceptible de plus et de moins, alors la vitesse du mobile pourra être augmentée ou diminuée, sans qu'il cesse de décrire une circonférence de cercle : seulement le fil se trouvera plus ou moins tendu, et la force qui retient le mobile, fera pour cela un effort plus ou moins grand.

Mais enfin si l'on suppose que la vitesse de circulation s'accélère jusqu'à un certain point, le fil se rompra, ou la force de cohésion sera détruite; et le mobile que deviendra-t-il alors ? il continuera à se mouvoir avec toute la vitesse dont il est animé à ce moment, suivant *une droite* qui sera le prolongement du très-petit arc, qu'il décrivait au moment où la force centripète lui a manqué. Cette droite est une tangente

à la courbe, et l'on dit, qu'*un corps qui circule, fait continuellement effort pour s'échapper par la tangente.* Ceci s'applique également à un corps qui tourne sur lui-même, et dont les molécules sont sollicitées à se séparer par l'effet de la force centrifuge qui résulte du mouvement de rotation, et qui se séparent en effet quand cette force à cause de la rapidité du mouvement, vient à l'emporter sur la force de cohésion. Les molécules s'échappent alors par les tangentes aux circonférences qu'elles décrivaient.

L'effort que fait pour s'échapper un mobile qui se meut en ligne courbe, s'appelle aussi *force tangentielle.* On voit que dans le cercle cette force ne diffère pas de l'impulsion primitive qui persévère, comme on a dit, abstraction faite de tout obstacle.

Quand on fait circuler une pierre au moyen d'une fronde, la pierre en vertu de l'impulsion qu'elle a reçue du bras qui la pousse, se trouve animée d'une force centrifuge, qui croît comme le quarré de la vitesse de rotation, et la fronde éprouve une pareille tension. Mais au moment où on lâche un des bouts de la fronde, la pierre s'échappe par la tangente au cercle qu'elle décrivait, et s'en va en ligne droite, et avec une vitesse égale à la vitesse de rotation, frapper l'objet qu'on avait en vue. L'avantage que l'on trouve ici, c'est de faire prendre à la pierre une vitesse bien plus grande, que celle que le bras tout seul pourrait lui imprimer.

4. *Expériences relatives à la force centrifuge.*

On peut confirmer par l'expérience tout ce qui a été établi ici concernant la force centrifuge. On fait usage pour cela d'un appareil décrit dans la Physique de

l'abbé *Nollet*, et qui consiste principalement en une roue verticale, et une poulie horizontale, embrassées l'une et l'autre par une corde qui se rattache à elle-même, ou comme on dit, une corde *sans fin*. On peut donc au moyen de la roue, imprimer un mouvement de rotation à la poulie, et à tous les objets qui sont fixés sur elle.

Première expérience. On place d'abord sur la poulie une tablette, où est tendu horizontalement un fil de fer. Deux billes d'ivoire percées d'outre en outre par leurs centres, sont enfilées sur ce fil de fer, et peuvent glisser suivant sa longueur. On dispose d'abord ces deux billes, qui sont unies l'une à l'autre au moyen d'une soie, on les dispose de manière que l'une d'elles étant placée au centre du mouvement, l'autre en soit à quelque distance. Si l'on commence alors à faire tourner la roue d'abord tout doucement; on remarquera que les deux billes resteront chacune à la place qui lui a été assignée, et que la soie qui les unit éprouve une certaine tension.

La bille placée au centre de la poulie, tourne sur elle-même, et les forces centrifuges de ses différentes parties se faisant mutuellement équilibre, elle demeure fixe à cette même place. Quant à l'autre bille, elle tourne autour de la première, et décrit une circonférence qui a pour rayon sa distance au centre du mouvement : elle a donc une certaine force centrifuge dépendante du *quarré de sa vitesse.* Lorsque cette vitesse est très-petite, l'inertie de la bille du centre qu'elle doit entraîner, suffit pour faire équilibre à cette force centrifuge. Mais si l'on fait croître la vitesse un peu au-delà, aussitôt la force centrifuge l'emporte, et la

bille s'éloigne autant qu'il est possible, emmenant avec elle celle qui était placée au centre. Le mouvement par lequel les deux billes s'éloignent, se fait suivant une ligne droite, qui est le fil de fer où elles sont enfilées. Cette ligne passe par le centre du mouvement, et ne paraît pas être cette *tangente* par laquelle doivent s'échapper les corps qui circulent, lorsque la force centrifuge prévaut tout-à-fait. Mais si l'on y fait bien attention, on reconnaîtra facilement que les différens points du fil de fer se placent, pendant le mouvement de rotation, suivant une véritable tangente à la circonférence que la bille décrivait ; et que c'est cette même tangente qu'elle parcourt en s'éloignant. L'expérience est donc d'accord avec les principes.

Deuxième expérience. On prouve encore d'une autre manière l'existence de cette force centrifuge dans les corps qui tournent autour d'un centre. On prend un petit vase ouvert par en haut, et on le remplit d'eau. On l'attache à un cordon, au moyen duquel on le fait tourner rapidement dans un plan vertical ou à peu près. Le vase tourne donc autour de la main qui tient le cordon ; et il ne se répand pas la moindre portion de l'eau dont il est plein. Cependant à la partie supérieure de sa révolution, l'ouverture du vase est tournée en bas, et l'eau sollicitée par la pesanteur, pourrait facilement tomber. Ce qui s'oppose à sa chute dans cette circonstance, c'est la force *centrifuge*, ou l'effort que l'eau fait pour s'éloigner du centre de sa révolution, effort qui est alors directement contraire à la pesanteur. Cette force centrifuge applique le liquide contre le fond du vase, et le ferait échapper par là, si ce fond était percé de quelque trou.

On trouve une application utile de ces notions sur la force centrifuge dans le *ventilateur* du docteur *Désaguliers*, et dans le moulin à nettoyer le blé de M. *Duhamel*. Le premier consiste dans un grand tambour, traversé par un axe qui est garni de plusieurs ailes. Au moyen d'une manivelle on fait prendre à celles-ci un mouvement de rotation, auquel participe nécessairement l'air renfermé dans le tambour. Cet air que rien ne retient, obéit à la force centrifuge qui résulte de ce mouvement, et s'échappe par une issue pratiquée à la circonférence du cylindre ; tandis que de nouvel air vient prendre sa place, et pénètre dans l'intérieur du tambour par une ouverture ménagée près de l'axe, où la force centrifuge est presque nulle. Tel est le ventilateur de *Désaguliers*, lequel a pour objet, comme on voit, de renouveler l'air d'un lieu donné.

Cette même machine sera le moulin de M. *Duhamel* si l'on conçoit qu'au devant de l'ouverture par où l'air intérieur s'échappe, on a disposé un plan incliné fait en fil de fer, sur lequel on fait descendre le blé qu'on veut nettoyer. L'air sortant, en passant au travers des mailles du plan, emportera avec lui les pailles et autres corps légers, tandis que les grains de blé plus lourds se rendront dans l'endroit qui est destiné à les recevoir. Cette machine est aujourd'hui usitée dans toutes les campagnes.

Troisième expérience. On fixe sur la poulie horizontale de l'appareil ci-dessus, une cuvette de métal fermée et remplie d'eau. A cette cuvette sont mastiqués, et opposés entre eux, deux tuyaux de verre terminés par des globes creux : ces tuyaux sont inclinés de manière que leurs extrémités les plus éloignées sont plus élevées que la cuvette. On imprime au tout un mou-

vement de rotation , et aussitôt on voit le liquide monter dans l'intérieur des tuyaux, et parvenir, si la vitesse est assez grande , jusque dans les globes qui les terminent.

Le mouvement de rotation transmis à l'eau qui remplit la cuvette , lui fait prendre un certain degré de force centrifuge. Les parties les plus éloignées du centre , et qui répondent à l'embouchure des tuyaux, sont les premieres à obéir à cette force , et rencontrant un plan incliné, elles se trouvent forcées de s'élever le long de ce plan , et de prendre ainsi une direction contraire à la pesanteur. Il est facile d'expliquer cette élévation, en décomposant la force centrifuge en deux forces, l'une perpendiculaire au plan incliné , et détruite par la résistance de ce plan, et l'autre qui lui est parallèle, et qui par conséquent doit avoir tout son effet. L'expérience qu'on vient de rapporter et d'expliquer, nous fait voir comment l'eau peut s'élever au-dessus de son niveau , en faisant usage de la force centrifuge , qui naît du mouvement de rotation.

Lorsqu'un mobile est en mouvement autour d'un point donné, comme chacune des particules matérielles dont il est composé , est animée de la même vitesse , il faut avoir égard à la masse pour évaluer la grandeur de l'effort par lequel il tend à s'éloigner du centre de son mouvement. Ainsi quand on fait tourner autour d'un même centre des corps fluides ou solides entremêlés ensemble, ceux de ces corps qui ont le *plus de masse*, acquièrent aussi *plus de force centrifuge*, font plus d'effort pour s'éloigner, et déplacent même ceux qui sont plus légers , et qui sont ainsi forcés de s'approcher du centre. C'est ce que l'on voit clairement dans les

vans à nettoyer le blé. Le van est, comme on sait, suspendu par trois points de sa circonférence. On lui fait prendre un mouvement *demi-circulaire* en allant et venant, et le grain qu'il contient, prenant le même mouvement, se porte à la circonférence parce qu'il est plus pesant, tandis que la paille comme plus légère se réunit vers le centre.

Quatrième expérience. On établit sur la poulie horizontale du même appareil une pièce, qui porte deux paires de tubes de verre un peu inclinés à l'horizon, et s'élevant du centre à la circonférence. Deux de ces tubes sont remplis, l'un d'eau et d'essence de térébenthine colorée, et l'autre d'eau et d'air seulement. Les deux autres tubes sont entièrement pleins d'eau : mais l'on a introduit dans l'un une petite balle de cuivre, et dans l'autre une petite boule de liége. Avant qu'on imprime aucun mouvement à cet appareil, chaque corps est à la place que lui assigne sa *gravité spécifique* : l'essence de térébenthine et l'air sont au-dessus de l'eau ; la balle de cuivre est au bas de son tube, et la boule de liége au haut du sien. Mais si tout étant bouché avec soin, on fait tourner l'appareil avec quelque rapidité, sur-le-champ tout cet ordre est interverti : l'air et l'huile viennent se placer au-dessous de l'eau, comme s'ils étaient devenus plus pesans : la balle de cuivre s'élève vers le haut du tube, et la boule de liége descend au fond de l'eau. Mais cette espèce de désordre ne dure qu'autant que dure le mouvement : sitôt qu'il cesse, tout revient à sa place. Cette expérience confirme parfaitement ce qui a été dit sur la nécessité de faire entrer la masse dans l'évaluation de la force centrifuge.

Puisque dans tous les cas où un mouvement de cir-

culation est établi ; les corps les plus légers sont poussés forcément vers le centre , il ne faut pas être surpris, que les gens de rivière évitent avec tant de soin les endroits , où l'eau par la diversité des chocs qu'elle éprouve, prend un mouvement de *tourbillon*. Il est visible qu'un bateau qui s'engagerait dans un de ces *tournans* , serait poussé vers le centre du mouvement, et forcé de tourner aussi sur lui-même, pour être enfin brisé, ou englouti par les flots, si le tourbillon avait une certaine rapidité , et si la force et l'habileté des bateliers n'étaient pas suffisantes pour le tirer de ce danger.

Lorsque les tourbillons d'air saisissent quelques corps de peu de masse, ils les poussent aussi d'abord vers leur centre , à cause de l'excès de leur force centrifuge, ces corps ne pouvant prendre que peu à peu la vitesse du tourbillon : mais à mesure que leur vitesse augmente, ils s'éloignent du centre de plus en plus, parce qu'à raison de leur masse , leur force centrifuge devient bientôt supérieure à celle de l'air qui les entraîne. C'est ce qu'on voit arriver aux pailles , aux plumes et autres corps légers dans les endroits où le vent en se réfléchissant sur lui-même prend un *mouvement giratoire*.

Les grands tourbillons que l'on appelle *trombes*, et qui ont souvent un mouvement progressif, sont capables , comme on sait , d'arracher des arbres, d'enlever les toits des maisons , et de produire d'autres effets également étonnans et désastreux , et ils doivent leur puissance prodigieuse et dévastatrice à la grande force centrifuge dont ils sont animés.

Si lorsque plusieurs corps tournent avec *la même vitesse*, ce sont les corps les plus pesans qui ont le plus de force centrifuge ; lorsque ces corps tournent

avec *des vitesses différentes*, il peut se faire que ce soit les plus légers, qui, à raison d'une plus grande vitesse, fassent plus d'effort pour s'éloigner du centre, et dont la force centrifuge par conséquent soit la plus grande. C'est en partant de ce principe, que *Descartes* avait cru pouvoir expliquer *mécaniquement* la pesanteur des corps terrestres par l'action *centripète* d'un tourbillon de matière subtile et invisible circulant autour de la terre avec beaucoup de rapidité. On a vu plus haut ce qu'il fallait penser de ce système.

Lorsqu'un corps tourne sur lui-même, toutes les parties dont il est composé, décrivent autour de l'axe de sa révolution des circonférences de cercle plus ou moins grandes, et elles ont par conséquent plus ou moins de force centrifuge. Ces parties se sépareraient donc, et se disperseraient dans l'espace, si elles n'étaient retenues par la *force de cohésion*, dont il a été parlé dans les *notions préliminaires*. Mais il peut arriver que cette force ne soit pas suffisante pour faire équilibre à la force centrifuge, alors les parties du corps se dispersent en effet, et chacune d'elles s'échappe par la *tangente* à la circonférence qu'elle décrivait, et avec toute la vitesse dont elle était animée dans sa révolution. C'est ainsi qu'on voit la boue lancée au loin par une roue qui tourne avec rapidité. C'est ainsi qu'il arrive quelquefois que la meule du coutelier vole en *éclats*, au grand danger de ceux qui sont présens. Cet accident arrive, lorsqu'à la rencontre de quelques particules plus dures, il se fait dans toute la pierre un ébranlement, qui affaiblit pour le moment la cohésion des molécules, et donne lieu à la force centrifuge d'en triompher totalement.

En voyant ces effets de la force centrifuge, et plusieurs autres semblables, il y en a qui ont cru faire une objection puissante contre le mouvement *diurne* du globe terrestre, en disant que si ce mouvement avait lieu, on devrait voir les cailloux, le gravier, les sables et l'eau elle-même se détacher de la surface de la terre, et se perdre dans l'espace. Mais ceux qui ont fait cette objection, avaient oublié sans doute qu'il existe sur la terre une force *centripète*, bien supérieure à la force centrifuge résultante du mouvement diurne: c'est la pesanteur. Si l'on veut comparer ensemble ces deux forces dans le lieu où elles sont plus directement opposées entre elles, et où la force centrifuge terrestre est à son *maximum*, c'est-à-dire à l'*équateur*; on trouvera que *la force de la pesanteur y est encore* 289 *fois aussi grande que la force centrifuge qui résulte du mouvement de rotation.* Ce rapport s'obtient en comparant les espaces que ces deux forces sont capables de faire parcourir chacune dans une unité de temps. Comme le nombre 289 est le *quarré* de 17, et que la force centrifuge croît en raison du *quarré de la vitesse*, il suit que pour rendre cette force égale à celle de la pesanteur, il faudrait que notre globe tournât sur lui-même avec une vitesse *dix-sept fois* plus grande, ou qu'il fît sa révolution journalière en *une heure et* 24 *minutes à peu près*, au lieu de 24 heures. Tout ce que peut donc faire la force centrifuge résultante du mouvement journalier, c'est de diminuer la pesanteur des corps terrestres au plus d'une 289me partie.

Si les parties du corps qui tourne sur lui-même, ne sont point fixées entre elles d'une manière invariable, et que la force qui les unit, leur laisse une certaine

flexibilité, ou *mobilité*, comme dans un globe d'eau dont toutes les parties s'attireraient mutuellement ; alors le mouvement de rotation faisant naître une force contraire à celle-là, il arrivera que la forme du corps sera altérée. Si c'est un globe qui tourne sur un axe, la vitesse de rotation allant en augmentant des pôles à l'équateur, la force centrifuge croîtra aussi dans le même sens : d'où il suit que le globe *perdra sa forme sphérique, qu'il s'élèvera vers son équateur et s'aplatira à ses pôles*. Les parties de son équateur sollicitées par une force centrifuge plus grande, s'eloigneront davantage du centre de leur révolution, qui est le centre de la sphère ; et celles des pôles, où la force centrifuge est nulle, se rapprocheront au contraire de ce point, pour fournir à cette élévation, et pour que l'équilibre s'établisse dans toute la masse. Les mesures prises sur le globe terrestre par les astronomes, lui donnant une forme telle que la prendrait, comme on vient de l'observer, un globe flexible tournant sur lui-même, on peut dire que cette forme reconnue et constatée est une preuve démonstrative du mouvement diurne de notre globe.

Cinquième expérience. Pour rendre sensible ce qui vient d'être dit, on fixe au centre de la poulie horizontale de notre appareil, une tige verticale sur laquelle sont enfilés deux grands cercles de cuivre, larges, minces, flexibles, se croisant à angles droits, et représentant deux *méridiens* d'une sphère. Au moyen de la roue, on leur fait prendre un mouvement de rotation dans le sens horizontal, et l'on voit aussitôt ces deux anneaux perdre leur forme circulaire, *s'aplatir de haut en bas*, et se *renfler* vers leur milieu dans le sens de leur mouvement.

doigt, on la fait tourner en sens contraire, en forçant le fil à se développer.

Mais il peut arriver que la vitesse d'impulsion n'ayant pas avec la force accélératrice le rapport trouvé pour le cercle, la courbe décrite soit néanmoins une *courbe fermée*, et dans laquelle le mobile fasse des révolutions sans fin. Voici de quelle manière on peut concevoir la chose.

Soit A (fig 30) le lieu où est placé le mobile, AR la direction de l'impulsion qu'il a reçue, et C le point vers lequel la force accélératrice est dirigée. Si la vitesse dans le sens AR est moindre que celle qui est nécessaire pour décrire un cercle du rayon CA, le mobile au lieu de décrire l'arc de cercle AB, suivra un arc plus courbe, tel que AE par exemple; de façon qu'au bout d'un certain temps, il sera plus près du centre de la quantité BE, et que son mouvement au point E sera dirigé suivant EG. Mais comme il est facile de voir, cette tangente EG *n'est plus perpendiculaire* à la droite EC. Les deux forces qui agissent sur le mobile, faisant entre elles un angle *plus petit que l'angle droit*, commencent donc à s'entr'aider mutuellement : la vitesse du mobile s'accroît, et par conséquent la force centrifuge devient plus grande. Il est vrai que la force centripète augmente aussi, parce que la distance au point central diminue : mais cette augmentation sert encore à accélérer la vitesse du mobile, et à lui donner plus de force centrifuge.

Maintenant lorsqu'en vertu de ces accélérations successives le mobile est arrivé au point P, et qu'il a fait ainsi une demi-révolution, les forces sont de nouveau perpendiculaires l'une à l'autre; et si la

vitesse à ce point est *plus grande* que celle qu'il faudrait pour décrire un cercle du rayon CP, le mobile commencera à s'éloigner du centre. Bientôt après cela les directions des deux forces étant devenues *obliques* l'une à l'autre, et faisant entre elles un angle *obtus*, leurs actions se nuisent mutuellement, et la vitesse du mobile se ralentit. La force qui tend à l'éloigner du centre, diminue donc; mais l'accroissement de la distance fait aussi diminuer celle qui travaille à l'en approcher; de sorte que ces deux forces parcourent en sens contraire les mêmes variations, qu'elles ont éprouvées dans la premiere moitié de la révolution. Le mobile revient donc enfin au point A d'où il était parti, et où les choses recommencent dans le même ordre. Pour que le mouvement se fasse comme on vient de dire, il suffit de trouver *la loi* suivant laquelle la force centripète doit agir *eu égard à la distance.*

6. *Lois du mouvement elliptique.*

Lorsqu'un mobile est soumis à une force constamment dirigée vers le même point, alors quelle que soit la nature de la courbe qu'il décrit, *les aires* que trace sou rayon vecteur, *sont égales en temps égaux.* On appelle *rayon vecteur* la droite menée du point en question à un point quelconque de la courbe, et l'on considère ce rayon, comme tournant autour de son origine sur le plan de la courbe, *s'accourcissant* ou *s'allongeant* selon qu'il est nécessaire pour atteindre toujours à cette courbe. On suppose qu'il porte le mobile à son extrémité la plus éloignée, ce qui lui a fait donner le nom de *vecteur.*

Pour prouver la proposition qu'on vient d'établir, supposons que le mobile ait parcouru la petite droite AB (fig. 31) dans la première unité de temps. S'il pouvait continuer sa route dans le même sens, il décrirait dans l'unité suivante BD *égale* à AB, et l'*aire* du triangle BCD serait visiblement *égale* à celle du triangle ACB. Mais si au point B il est obligé de fléchir sa route, comme il a été expliqué ci-dessus, et de suivre la diagonale BF ; alors le rayon vecteur aura décrit dans la deuxième unité de temps l'aire du triangle BCF, qui est *égale* à celle du triangle BCD, à cause de l'*égalité des bases et des hauteurs*. Par conséquent cette aire BCF est aussi *égale* à ACB, et le rayon vecteur dans la deuxième unité a tracé une surface de la même grandeur que celle décrite dans la première. *Les aires décrites sont donc* en général *proportionnelles aux temps :* ce qu'il fallait prouver. Il est évident que la grandeur de la force accélératrice ne fait rien ici, pourvu que cette force soit toujours dirigée vers le même point.

Réciproquement si les aires décrites sont égales en temps égaux, on peut en conclure que le mobile, outre la force d'impulsion, est soumis à une autre force qui le pousse ou le tire constamment vers un même point. Car si la force qui change la direction du mobile au point B, n'était pas dirigée comme précédemment au point C, les triangles BCD, BCF, n'auraient plus *la même hauteur*, et leurs bases demeurant *égales*, leurs aires ne pourraient plus être les *mêmes* ; ce qui est contre la supposition. *Cette proportionnalité des aires aux temps* a été reconnue par observation dans les mouvemens des planètes autour du soleil, et l'on en a conclu avec raison qu'elles étaient soumises à une force

accélératrice dirigée vers cet astre, ou qui paraissait émaner de son sein.

La proposition qu'on vient de prouver, sert elle-même de base à une autre loi également importante, concernant l'espèce de mouvement que nous considérons ici. La vitesse d'un mobile qui décrit une courbe fermée autre que la circonférence du cercle, varie à chaque point de sa révolution : mais il est facile d'avoir la loi de ces variations. En effet, puisque les aires décrites en temps égaux sont égales, prenons en des points différens de la courbe, deux arcs AE, PF (fig. 30) que l'on supposera parcourus en des temps *égaux* infiniment courts. Les aires ACE, PCF devant être *égales* d'après la loi, si l'on considère ces triangles comme rectilignes, *leurs bases seront entre elles dans le rapport renversé de leurs hauteurs.* Or l'on peut prendre les arcs AE, PF pour les *bases* de ces triangles, et leurs *hauteurs* seront les perpendiculaires abaissées du point C sur ces arcs, ou plutôt sur leurs tangentes. Les longueurs des arcs décrits sont donc *en raison inverse* de ces perpendiculaires; et comme on a supposé que les arcs choisis avaient été décrits dans des temps *égaux*, les longueurs de ces arcs expriment donc les vitesses du mobile en ces deux points de sa révolution : d'où il suit en général que *les vitesses* d'un mobile qui se meut en ligne courbe comme on a dit, *sont entre elles réciproquement, comme les perpendiculaires abaissées du point C sur les arcs décrits.*

Aux points A et P que nous avions choisis et qui sont, l'un le *plus loin* et l'autre le *plus près* du centre C, les perpendiculaires demandées ne sont autre chose que les rayons vecteurs CA, et CP. Donc à ces deux

points les vitesses du mobile sont *réciproques* aux rayons vecteurs.

Après avoir trouvé la loi des vitesses dans le mouvement curviligne qui nous occupe, il resterait à connaître quelle est la manière d'agir de la force accélératrice, lorsque le mobile parcourt une courbe fermée différente du cercle, et qu'il fait ainsi des révolutions sans fin autour du point qui est le siége de cette force. Nous savons déja que la force centripète en A doit être plus grande que *le quarré de la vitesse* qui a lieu dans ce point, *divisé par la distance* AC, et qu'au point P la même force doit être plus petite que le *quarré de la vitesse* en cet endroit, *divisé par CP*. L'on peut conclure de là, que le rapport de la force centripète dans ces deux points doit être *moindre que le rapport inverse du cube des distances.* (1) Mais ces notions ne pouvaient suffire; et il a fallu tout le génie du grand *Neuton* pour découvrir que cette force agissait *en raison inverse du quarré de la distance* : c'est au moins la loi qu'elle suit dans les espaces célestes.

L'illustre *Kepler* à force de recherches et d'observations avait reconnu que les planètes décrivaient

---

(1) Soient u et u' les vitesses en A et P, r et r' les distances CA et CP : d'après la loi précédente, on a, u : u' :: r' : r. Or on sait que la force centripète en A, ou f, est plus grande que $\frac{u^2}{r}$, et que celle en P, ou f', est plus petite que $\frac{u'^2}{r'}$. Mais $ur = u'r'$. Donc $f > \frac{1}{r^3}$, et $f' < \frac{1}{r'^3}$. Ce qui apprend que la force centrale suit un rapport moindre que celui inverse du *cube* des distances. Le *cube* d'un nombre est le produit du quarré du nombre, multiplié par ce nombre lui-même.

autour du soleil des courbes fermées, et rentrantes sur elles-mêmes ; que ces courbes n'étaient point des circonférences de cercle, mais qu'elles étaient de la nature de celles qu'on appelle en géométrie des *ellipses*, s'éloignant plus ou moins de la forme circulaire ; que le soleil était placé, non au centre de ces courbes, mais à l'un des deux points, qu'on appelle leurs *foyers*; enfin que la vitesse des planètes *s'accélère* lorsqu'elles approchent du soleil, et qu'elle *se ralentit* quand elles s'en éloignent. Ce grand astronome conclut de toutes ces belles découvertes, que le soleil exerçait une espèce d'*attraction magnétique* sur les corps planétaires ; et que ceux-ci, outre une impulsion primitive reçue de la main puissante du Créateur, étaient encore soumis à une force accélératrice dirigée vers le soleil, et dont la source paraissait placée dans cet astre. *Neuton* compléta les découvertes de *Kepler* en trouvant la loi ci-dessus, suivant laquelle cette force exerce son action, loi qui a été confirmée depuis par toutes les observations astronomiques.

Ce que l'on a dit de la force centrifuge dans le cercle, s'applique à toute autre courbe décrite par un mobile. Dès qu'un corps est forcé d'infléchir sa route, il fait de son côté un effort pour la continuer dans la même direction. Cet effort n'est point une force nouvelle, et créée dans ce moment : c'est le résultat des forces qui agissent sur lui, considéré dans le sens de son mouvement précédent, et en tant que ce mouvement ainsi continué l'aurait éloigné du point central où réside la force accélératrice. Il y a donc une force centrifuge dans tout mouvement en ligne courbe.

Soit pris dans une ellipse donnée (fig. 30) un très-

petit arc qr : il sera toujours facile de trouver un cercle, dont la courbure sera la même que celle de cet arc, et qui se confondra avec la courbe sur cette petite étendue. Ce cercle s'appelle le *cercle osculateur* en ce point. Son centre o est évidemment sur la perpendiculaire à l'arc donné. Le mouvement du mobile pouvant être considéré comme *uniforme* pendant le temps *infiniment court* qu'il met à décrire cet arc, sa vitesse sera dans ce moment soumise à la même loi, que s'il parcourait la circonférence du cercle osculateur. Ainsi sa force centrifuge relativement au centre de ce cercle, sera exprimée par *le quarré de sa vitesse divisé par le rayon du cercle osculateur.* On peut donc à chaque point de la courbe décrite trouver la grandeur de l'effort que fait le mobile, pour continuer de marcher en ligne droite ; et c'est par les accroissemens rapides et successifs de cette force centrifuge, qu'on expliquera pourquoi les planètes après s'être approchées du soleil depuis leur *aphélie* A jusqu'à leur *périhélie* P, commencent alors à s'éloigner de cet astre, quoique à ce point elles soient en prise à une attraction plus puissante.

CHAPITRE XI.

DU MOUVEMENT DES CORPS PESANS SOUMIS A UNE IMPULSION.

DÈS qu'un corps manque de soutien, à l'instant même la pesanteur s'empare de lui, et nous avons déjà examiné les résultats de cette action dans deux cas, lorsque la pesanteur agit toute seule, et lorsqu'elle est contrariée par une impulsion verticale de bas en haut. Il nous faut à présent rechercher ce qui arrive, lorsqu'un corps est poussé dans une autre direction quelconque, et que la pesanteur exerce en même temps son empire sur lui. Il est évident que son mouvement sera alors *composé ;* et comme l'une des deux forces est *continue*, et dirigée constamment vers un même point, le centre de la terre, le mobile sera dans le cas qu'on vient de considérer, et décrira par conséquent une ligne courbe. Examinons néanmoins toutes les circonstances de son mouvement.

1. *Mouvement des projectiles.*

Soit un mobile M (fig. 32) lancé dans la direction AE inclinée à l'horizon, et soient AB, BC, CD, &c. les espaces *égaux* qu'il parcourrait à chaque unité de temps, en vertu de l'impulsion qu'il a reçue. Repré-

sentons aussi par AP, PQ, QR, etc. les espaces croissans dont la pesanteur le ferait descendre successivement à chacune de ces unités. Si l'on construit avec ces droites les parallélogrammes convenables, on trouvera les points H, K, L, etc. pour ceux où le mobile sera arrivé à la fin de chaque seconde successive. Ainsi dès le premier instant le mobile quittera la direction AE, et la route qu'il aura suivie dans son mouvement, formera la *ligne brisée* AHKL. On peut ici, à cause de l'énorme distance où est placé le centre du globe, considérer les directions de la pesanteur comme étant *parallèles* entre elles.

Si l'on conçoit à présent, comme cela est vrai, que la pesanteur agit sur le mobile d'une manière continue, et sans interruption, il faudra donner aux unités de temps que nous avons distinguées, une durée infiniment courte : les diagonales de nos parallélogrammes seront aussi infiniment petites, et la ligne brisée qui était la route du mobile, se convertira en une ligne courbe, à laquelle la droite AE sera tangente, et dont la nature sera facile à déterminer. En effet pour chacun des points de cette courbe, les droites PH, QK, RL, etc. parallèles à la tangente AE, *croissant uniformément avec les temps*, les portions correspondantes de la droite AS *croissent comme les quarrés des temps*, et par conséquent *comme les quarrés des premières*. Or c'est là le caractère de l'espèce de courbe que les géomètres appellent *parabole*. (1)

---

(1) à QK *double* de PH ou AB, répond AQ *quadruple* de ; à RL qui est le *triple* de PH, répond AR qui vaut *neuf fois* . Ainsi les *abscisses* sont comme les *quarrés des ordonnées*, propriété caractéristique de la parabole ordinaire.

Donc les corps lancés obliquement à l'horizon décrivent des paraboles. On a une preuve matérielle de ceci dans un jet d'eau qu'on fait monter *obliquement* à l'horizon. Si l'on trace sur un plan vertical le cours du jet, on reconnaîtra que sa forme diffère peu de celle d'une parabole.

Dans le mouvement des corps qui sont poussés de bas en haut *obliquement* à l'horizon, il y a plusieurs choses à considérer. On peut demander, 1.° quelle est la hauteur à laquelle le mobile doit s'élever; 2.° quelle est la distance horizontale où il parviendra, ce que l'on appelle l'amplitude du jet; 3.° quelle est la direction *initiale* qu'il faut donner au mobile, pour qu'il parvienne à la plus grande distance possible; 4.° quelle doit être cette direction, pour qu'il aille tomber sur un point donné. Afin de répondre à ces différentes questions, il est nécessaire de connaître la vitesse que la force impulsive est capable de communiquer au mobile. Quant à la pesanteur, sa manière d'agir étant toujours la même, elle est par conséquent suffisamment connue. Il faut donc combiner ces deux forces de manière à trouver dans tous les cas la courbe qui sera décrite.

2. *Elévation et amplitude du jet.*

Soit comme tout-à-l'heure AF (fig. 33) la direction *initiale* du mouvement, et AB, BC, CD, etc., la vitesse *uniforme* du mobile suivant AF, résultant de l'impulsion qu'il a reçue. La droite AF étant inclinée à l'horizon, la vitesse par laquelle le mobile s'élèverait réellement à chaque instant, se réduit aux quantités A*b*, *bc*, *cd*, etc. Le cas est donc le même que si le mobile était poussé *verticalement* de bas en haut avec

une vitesse *uniforme* égale à Ab. Il n'y a donc pour trouver la hauteur à laquelle il parviendra, qu'à faire usage de ce qui a été dit ci-dessus page 143; et si par le point trouvé sur la verticale AK, on mène une ligne parallèle à l'horizon, cette ligne passera par le sommet de la courbe que décrira le mobile.

D'un autre côté la pesanteur n'apportant aucun obstacle au mouvement par lequel le mobile avance dans le sens horizontal, et sa vitesse dans ce sens étant exprimée par Ab', $b'c'$, $c'd'$, etc.; si l'on sait, ce qui est facile, pendant combien de secondes le mobile doit monter, on saura aussi quel est *l'espace horizontal* qu'il aurait parcouru pendant ce temps, ou la quantité dont il se serait éloigné *horizontalement* du point A. Par le lieu ainsi trouvé sur la droite AK' élevant une verticale, la rencontre de cette ligne avec l'horizontale menée précédemment, donnera le *sommet* de la parabole cherchée. On en aura l'*amplitude*, en doublant la distance horizontale.

Donnons un exemple. Un corps est lancé avec une vitesse de 300 pieds par seconde, et l'angle que fait avec l'horizon la direction initiale de son mouvement, est de 60 degrés. Pour un tel angle Ab est les 866 *millièmes* de AB, et Ab' en est la *moitié;* de façon que le mobile a tout à la fois une *vitesse d'ascension* de 260 pieds par seconde, et une *vitesse de progression* de 150 pieds dans le même temps. Or une vitesse ascensionnelle de 260 pieds est, d'après la page citée, entièrement épuisée au bout de 8 *secondes et deux tiers.* Mais dans ce temps-là un corps libre tomberait d'une hauteur de $1126\frac{2}{3}$ pieds : donc ce sera là aussi toute la hauteur où parviendra notre mobile. Dans ce même temps de $8\frac{2}{3}$ secondes, un corps qui se meut avec une vitesse uni-

forme de 150 pieds, parcourrait un espace de 1300 pieds : le mobile avancera donc aussi horizontalement de cette quantité dans ce temps-là. L'amplitude horizontale de la parabole décrite dans la présente supposition, et abstraction faite de tout obstacle, sera donc finalement de 2600 pieds, et son sommet est placé à une hauteur de 1126 $\frac{2}{3}$ pieds. La verticale menée par le sommet et le milieu de l'amplitude est *l'axe* de la parabole.

Il ne nous a fallu, comme on voit, que des considérations fort simples, pour résoudre les deux premières questions. Si l'on voulait tracer sur le papier la parabole décrite par le mobile, ce serait une chose facile, puisqu'on a *des données suffisantes*. On mèneroit d'abord une horizontale indéfinie AK′ (fig. 33), une verticale AK, et une oblique AF faisant avec l'horizontale un angle égal à l'angle donné. Prenant ensuite AB pour représenter la vitesse initiale, on portera sur AF plusieurs parties égales AB, BC, CD, etc.; et de chacun des points B, C, D, etc, on menera les parallèles horizontales Bb, Cc, Dd, etc. et les parallèles verticales Bb', Cc' Dd', etc. Cela fait on prendra sur l'horizontale AK′, un nombre de divisions *égal* au nombre des secondes pendant lequel le mobile est monté, et sur la verticale AK un nombre de ses divisions *moitié moindre ;* menant par les deux points ainsi déterminés, deux droites, l'une horizontale, et l'autre verticale, le lieu où ces droites se rencontreront sera le *sommet* de la parabole demandée. On en aura l'*amplitude* en doublant la partie prise sur AK′. Quant à la description exacte de la courbe, on en trouvera les différens points successifs, en déterminant sur les verticales Bb', Cc', Dd', etc. et à

partir des points B, C, D, etc., les quantités dont la pesanteur fait descendre les corps à chaque seconde. On fera passer une courbe continue, par tous les points qu'on aura ainsi trouvés ; et cette courbe sera la route du mobile tracée sur le papier. Elle est composée de deux branches parfaitement semblables, l'une *ascendante*, et l'autre *descendante*. La description peut en être par conséquent fort abrégée.

3. *De la plus grande amplitude.*

On a établi pour troisième question concernant le mouvement des *projectiles*, la question suivante : *Trouver quelle est la direction initiale qu'il faut imprimer au mobile, afin qu'il aille rencontrer le plus loin possible la ligne horizontale, qui passe par le point de départ :* ce qui fait la plus grande *amplitude* de la parabole.

Lorsque le mobile est lancé de bas en haut dans une direction verticale, nous savons qu'il monte et descend par la même ligne droite, et qu'il vient tomber dans le lieu même d'où il était parti. L'amplitude de la parabole est donc *nulle* dans ce cas, et cette courbe se réduit à une ligne droite verticale. Voilà au moins ce qui paraît à nos yeux, et qui serait exactement vrai, si le mouvement imprimé au mobile n'était pas impliqué avec un autre mouvement général, qui change l'état des choses lorsqu'on les considère en elles-mêmes.

La terre, comme on sait, tourne sur elle-même en 24 heures, et de plus elle tourne autour du soleil en un an. Mais si nous n'avons égard qu'au mouvement journalier, il est certain que le point de la surface du

globe d'où le mobile a été lancé, s'est avancé d'une certaine quantité dans le sens de ce mouvement pendant que le mobile était en l'air. Mais comme celui-ci avait dans le même sens *la même vitesse* que ce point, il a dû avancer aussi de la *même quantité* dans le même temps ; parce que l'impulsion verticale qu'il a reçue, étant perpendiculaire à ce mouvement commun, ne peut ni le favoriser, ni le contrarier. Ainsi notre mobile a donc à la fois deux vitesses, l'une *horizontale* et qui restera la même pendant tout le temps sans éprouver aucune altération ; et l'autre *verticale* de bas en haut, que la pesanteur combat et détruit bientôt, pour en substituer une autre également verticale, mais de haut en bas. Le mouvement du mobile se compose donc ; et pour obéir aux deux forces qui l'entraînent, et dont l'une est continue, il décrit *dans l'espace* une ligne courbe, qui vient se terminer sur la terre au point même d'où il était parti. Comme nous avons la même vitesse horizontale que le mobile, celle-ci est nulle pour nous. Le mouvement vertical est le seul que nous puissions apercevoir, et par conséquent il doit se faire suivant une droite apparente. C'est ici le même cas que celui de l'orange jetée de bas en haut par un cavalier au galop, et qui vient lui retomber dans la main. Le cavalier la voit monter et descendre par une ligne droite, tandis que les spectateurs lui voient décrire une ligne courbe, une *parabole* ascendante et descendante. Ce qu'on avance ici peut être rendu sensible par l'expérience suivante.

Expérience. On a un plan bien horizontal, sur lequel on fait rouler un petit chariot du mouvement le plus *uniforme* qu'il est possible. Au centre du chariot est

pratiquée une cavité , dans laquelle on place une bille d'ivoire. Quand le mouvement est bien établi , et que le chariot roule uniformément, un ressort se débande tout-à-coup , et chasse la bille verticalement de bas en haut. Cependant le chariot continue d'avancer , tandis que la bille se meut au travers de l'air : mais celle-ci, après être montée obliquement pendant quelque temps, redescend ensuite de la même manière, et vient retomber dans la cavité où elle était logée, ayant visiblement décrit une courbe *parabolique.*

Cette expérience fait voir clairement , que la bille a conservé en s'élevant dans l'air, la vitesse qu'elle partageait avec le chariot, avant que l'action du ressort l'en eût séparée ; et quoiqu'elle ait réellement décrit une ligne courbe , si l'on conçoit que par le point d'où elle est partie , l'on ait élevé une droite verticale, mobile avec le chariot, la bille en montant et descendant ; n'aura pas cessé de répondre à quelque point de cette droite, et aurait paru la décrire à un observateur, qui aurait eu la même vitesse horizontale.

Il y a encore un cas où l'amplitude de la parabole est *nulle*, au moins par rapport à la ligne horizontale, qui est menée par l'origine du mouvement : c'est celui où le mobile est poussé dans cette même direction horizontale. En effet la pesanteur commençant d'agir sur lui dès le premier pas qu'il fait, l'abaisse de suite au dessous de cette ligne ; et comme les deux forces qui le maîtrisent , sont perpendiculaires entre elles, et ne peuvent se nuire pour cette raison, il est évident que le mobile au bout de la première seconde, *aura baissé* de 15 pieds , quel que soit l'espace qu'il a parcouru en avant pendant ce temps , et quelle que soit la vitesse qui

lui a été imprimée dans ce sens. Une balle de fusil, un boulet de canon tirés suivant une direction horizontale, s'abaissent nécessairement de cette quantité dans une seconde de temps. Il est donc essentiel lorsqu'il s'agit d'atteindre un but donné, que la vitesse imprimée soit la plus grande possible, afin que l'intervalle soit franchi dans le temps le plus court, et que la pesanteur ait pour agir le moins de temps qu'il se peut.

Les règles établies plus haut nous apprennent, que si un corps tombe de *quinze* pieds dans une seconde, il ne descend dans une demi-seconde que du *quart* de cette quantité, et dans un *dixième* de seconde de *la centième* partie seulement de *quinze* pieds. Mais quelque court que soit le temps, le mobile descend toujours de quelque chose. Il suit de là que si le mobile est poussé dans une direction horizontale, et il en est de même pour toute autre direction, il frapperait toujours au dessous du but où l'on a visé, si l'on n'avait égard à cet effet *inévitable* de la pesanteur. Dans la construction des armes à feu, on a soin de leur donner plus d'épaisseur dans la culasse, que vers l'embouchure du canon. De cette manière la ligne par laquelle on vise, n'est point parallèle à l'*axe* de la pièce : mais celui-ci prolongé irait la croiser quelque part, pour s'élever ensuite au-dessus. Or le boulet chassé par la poudre, se meut d'abord suivant cet axe, et il irait frapper au dessus du but, s'il pouvait se maintenir dans cette direction : mais la pesanteur dans l'intervalle le fait descendre d'une quantité suffisante pour atteindre ce but. L'augmentation d'épaisseur dans le fusil ou le canon a été en général calculée pour les distances moyennes ; de sorte qu'elle tromperait pour les dis-

tances plus grandes ou plus petites : pour celles-là la balle resterait au dessous du but ; pour les autres elle frapperait au-dessus. C'est au reste à celui qui se sert d'une arme à l'étudier pour la connaître, et en tirer le service qu'il désire.

Reprenons le mobile qui est lancé dans une direction horizontale, et cherchons quelle est l'espèce de ligne qu'il suit dans son mouvement. D'abord la vitesse qu'il a dans le sens de l'horizon, est une vitesse uniforme de sa nature, et qui lui fait parcourir des espaces égaux en temps égaux. Quant à la vitesse verticale, c'est celle qui vient de la pesanteur, et qui va par conséquent en croissant suivant la loi connue. Si donc par le point qui est l'origine du mouvement on imagine deux droites (fig. 34) l'une horizontale, et l'autre au dessous de celle-ci et verticale, le mobile s'éloignera de cette dernière de quantités égales dans chaque seconde de temps, mais il descendra dans le sens vertical de quantités qui croîtront comme les *quarrés* des nombres de secondes. D'où il sera facile de conclure qu'il décrira une ligne courbe, et que cette courbe est une parabole, dont le sommet est au point de départ, et qui a pour axe la verticale imaginée. Il est facile de tracer, si l'on veut, cette courbe sur le papier, ainsi qu'on voit dans la figure.

On peut demander ici : *Où est-ce qu'un mobile lancé dans une direction horizontale, ira rencontrer un plan parallèle à l'horizon, dont l'abaissement au dessous de l'origine du mouvement est connu.*

La réponse à cette question est fort simple. On cherche d'abord quel est le temps qu'il faut à un corps pesant pour tomber de l'*origine* sur le plan donné ; et

l'on mesure sur ce plan, à partir du point où il est rencontré par la verticale abaissée de cette origine, un espace *égal à autant de fois* la vitesse horizontale que l'on a trouvé de secondes pour la durée de la chute. Le point du plan où l'on arrive ainsi, est celui où le mobile viendra le rencontrer. Ce point est donc d'autant plus éloigné de la verticale, que la vitesse d'impulsion est plus grande, et que le plan donné est plus abaissé au-dessous du point de départ.

Si l'on conçoit qu'une pièce de canon soit posée sur le sommet d'une haute montagne, et qu'un boulet soit tiré horizontalement, ce boulet ira tomber sur la terre à une certaine distance en décrivant une parabole. Imaginons une poudre dont la force expansive soit *beaucoup plus grande* que celle de la poudre commune; le boulet ira tomber plus loin, et aura embrassé dans sa parabole une plus grande portion de la circonférence terrestre. En augmentant ainsi par la pensée la force d'impulsion, on conçoit que le boulet pourrait ne retomber sur la terre, qu'après avoir passé sur la moitié de sa circonférence ; et même qu'il pourrait revenir au point d'où il est parti. Dans ce cas le mobile continuerait à se mouvoir dans le même sens, abstraction faite de toute résistance, et il *circulerait continuellement* autour de la terre, comme une petite planète. Ce mouvement de circulation serait le résultat des deux forces que nous avons supposées, la *force d'impulsion* qui toute seule éloignerait le mobile de plus en plus, et la *force de la gravité*, qui travaille sans cesse à le ramener.

Après avoir examiné avec quelque détail les deux cas où l'amplitude horizontale de la parabole est *nulle*,

revenons à la question proposée, qui a pour objet de déterminer le cas où cette amplitude est *la plus grande*. Puisque la parabole se réduit à une *droite*, et son amplitude à un *point*, lorsque le mobile est lancé verticalement de bas en haut ; que d'un autre côté elle est toute entière au dessous du plan horizontal mené par l'origine, lorsque le mobile est poussé dans la direction de ce plan, on peut déjà présumer que la courbe décrite par le mobile au-dessus de notre plan horizontal, sera la plus ouverte, lorsque la direction initiale de son mouvement tiendra *le milieu* entre ces deux-là, et qu'elle fera avec l'horizon un angle *demi-droit* ou de 45 *degrés*.

Lorsqu'un corps est lancé obliquement à l'horizon sous l'angle qu'on vient de dire, sa vitesse d'*ascension* est égale à sa vitesse de *progression* ; et dans le parallélogramme A*b*B*b'* (fig. 33) les côtés A*b* et A*b'* sont égaux. Or A*b* exprimant la vitesse *ascendante*, sert à déterminer le *temps* que le mobile demeure au-dessus de l'horizontale AK'; et A*b'* qui est la vitesse *progressive*, fait connaître l'*espace* qu'il parcourt dans ce sens pendant ce temps. Si l'angle *initial* augmente, A*b* devient plus grand, et le temps nécessaire pour ramener le mobile à l'horizontale, augmente aussi : mais A*b'* diminue en plus grande raison, et l'espace parcouru horizontalement pendant ce temps, devient plus petit. De même si l'angle d'inclinaison est moindre que 45 degrés, la vitesse de progression sera plus grande, mais le temps diminuant en plus grande proportion, l'amplitude de la parabole sera encore moindre que dans le premier cas. L'inclinaison de 45 degrés est donc celle qui donne la plus grande amplitude, où

comme on dit, *la plus grande portée.* On peut trouver facilement une démonstration rigoureuse de cette proposition. (1)

4. *De la direction convenable pour atteindre un point donné.*

Il reste à résoudre la dernière question : *déterminer l'angle d'inclinaison nécessaire, pour qu'un mobile lancé obliquement avec une vitesse connue, aille tomber sur un point donné.* Cette question, comme il est facile de voir, est accompagnée de plus de difficultés qu'aucune des précédentes : car il s'agit ici de déterminer une parabole qui doit passer par le point de départ et par le point donné, lesquels, comme il est évident, peuvent appartenir en même temps à des paraboles différentes. Voici néanmoins une solution de ce problème, graphique et fort simple.

Supposons d'abord que le point donné est situé sur la même droite horizontale que le point de départ. Il

---

(1) En désignant par a l'angle que fait avec l'horizon la direction initiale du mouvement, on a, V cos a pour la vitesse horisontale, et V sin a pour la vitesse verticale. Le temps de l'ascension est donc, $\frac{V \sin a}{g}$; et la demi-amplitude est exprimée par $V \cos a \times \frac{V \sin a}{g} = \frac{V^2}{g} \sin a \cos a$. L'amplitude totale est donc, $\frac{V^2}{g}\, 2 \sin a \cos a = \frac{V^2}{g} \sin 2a$. Elle est donc la plus grande possible, lorsque $\sin 2a = 1$, ou que l'angle a est de 45 degrés.

est évident qu'il ne peut pas être éloigné de celui-ci d'une quantité plus grande que *la plus grande portée* qui peut avoir lieu sous la vitesse donnée. Si sa distance est égale à cette plus grande portée, le problème est dejà résolu par ce qui a été dit précédemment. Mais si la distance du point donné est moindre, alors il y aura *deux inclinaisons* qui pourront satisfaire au problème, l'une plus grande, et l'autre plus petite que 45 degrés, et qu'on obtiendra de la manière suivante.

On cherchera d'abord quelle est la *hauteur due* à la vitesse de projection, c'est-à-dire quelle est la hauteur d'où un corps pesant doit tomber pour acquérir une vitesse égale à celle-là. On élèvera ensuite par le point donné B (fig. 35) une droite verticale, sur laquelle du point A, avec une ouverture de compas égale au *double* de la hauteur trouvée, on marquera un point C; et menant AC, l'angle ACB sera le *double* de l'angle cherché moindre que 45 degrés. Pour avoir la seconde inclinaison, on fera un angle qui surpasse 45 degrés *autant* que l'autre déja trouvé en est au-dessous; et la question proposée sera ainsi résolue : c'est-à-dire, que pour atteindre le point donné B, le mobile devra être lancé ou suivant la droite AF, ou suivant AF'. Dans le premier cas il décrira la parabole ASB, et dans le second il suivra la courbe AS'B.

Sur l'*axe* de la parabole est un point remarquable, que l'on appelle le *foyer* de la courbe. Ce point a été ainsi nommé, parce que c'est là que vont se réunir tous les rayons lumineux, qui tombent sur la concavité de la parabole *parallèlement* à l'axe, et qui sont réfléchis par cette courbe. Réciproquement lorsqu'un point radieux est placé au foyer d'une parabole, tous

les rayons qui s'en échappent, et qui tombent sur la courbe, sont réfléchis *parallèlement* entre eux, et à l'axe de cette parabole. La même chose a lieu pour ce qu'on appelle le *calorique rayonnant.*

Outre la propriété physique dont on vient de parler, le foyer de la parabole jouit de quelques propriétés mathématiques dont on parle en géométrie, et il est surtout fort utile pour la description de la courbe. Voici de quelle manière on peut trouver les foyers des deux paraboles, qui donnent la solution du problème proposé.

Du point de départ A (fig. 36), et avec un rayon égal à la hauteur due à la vitesse initiale, on décrira une circonférence de cercle. Du point B d'arrivée, et avec le même rayon, on en décrira une autre. Ces deux circonférences se couperont en deux points, qui seront les *foyers* cherchés. Ces foyers seront ici sur une même *verticale* sur laquelle aussi seront placés les *sommets* des deux courbes.

Pour avoir le sommet de la parabole dont le foyer est en F, je mène par le point D qui est la *hauteur due*, l'horizontale DE, qui coupe en K la verticale PF, et je divise KF en deux parties égales. Le point S est le sommet de la première parabole. On aura celui de l'autre parabole dont le foyer est en F', en divisant de même en deux parties égales la distance KF'. On aura enfin les angles de projection demandés, en suivant le procédé exposé ci-dessus.

Si le point qu'on veut atteindre était plus ou moins élevé que l'horizontale menée par l'origine A (fig. 37), je décrirais d'abord de ce point A, et avec un rayon égal à la *hauteur due*, une circonférence de cercle.

Du point B, et avec ce rayon augmenté, ou diminué de toute la quantité dont le point B est au-dessous ou au-dessus de l'horizontale AH, on décrira une autre circonférence, qui coupera encore la première en deux points. Ces points qui ne sont plus ici sur la même verticale, sont les *foyers* des deux paraboles que le mobile peut décrire pour arriver au point donné. En menant par le point D une horizontale, on trouvera comme tout à l'heure, les sommets de ces paraboles. On obtiendra aussi les angles de projection par le même moyen que précédemment.

Dans la pratique du jet des bombes, on détermine communément la force de la poudre, en tirant sous un angle de 45 degrés. La portée est alors, comme on a dit, un *maximum*, et la moitié de cette portée est *égale* à la hauteur d'où un corps pesant devrait tomber pour acquérir la vitesse du mobile à son départ. La force de la poudre étant ainsi connue, on peut résoudre aisément notre dernier problème par les méthodes du calcul. Voyez pour cela la *Mécanique* de *Bézout*, ou celle de l'abbé *Marie*, ou, etc.

5. *Influence de la résistance de l'air sur le mouvement des projectiles.*

Dans tout ce qu'on a dit jusqu'ici sur le mouvement des projectiles, l'on n'a eu aucun égard à la résistance de l'air. On a supposé que ce mouvement se faisait dans le *vide*, et que nulle puissance étrangère ne venait troubler l'action des forces qui entraînent le mobile. Il est évident que les résultats ne pourront plus être exactement les mêmes, si un fluide oppose son inertie,

et dérobe à tous momens au mobile une partie de sa vitesse. C'est ce que nous avons déja vu, lorsqu'il a été question des corps lancés verticalement de bas en haut ; et qui a également lieu, lorsqu'ils sont poussés dans une direction quelconque.

Supposons d'abord que le mobile est chassé horizontalement : la vitesse qu'il a reçue dans ce sens par l'impulsion d'une force instantanée, et que nous avons regardée comme uniforme, va au contraire en s'affaiblissant de plus en plus par la résistance de l'air que le mobile est obligé de traverser et de déplacer. Ce mobile ne se trouvera donc pas au bout d'un temps donné, aussi avancé qu'il l'eût été sans cet obstacle. Il n'y aura donc pas entre son mouvement progressif et son abaissement produit par la pesanteur, le rapport qui nous avait donné une parabole pour la courbe décrite. Cependant celle-ci s'éloignera d'autant moins de la forme parabolique, que la vitesse initiale du mobile sera moins grande, et que l'arc parcouru aura moins d'étendue. Ainsi l'eau qui s'échappe d'un réservoir par un orifice latéral, lorsqu'elle est reçue à peu de distance, décrit assez exactement une parabole.

Si le mobile est lancé dans une direction oblique à l'horizon ; d'abord la résistance de l'air l'empêchera d'atteindre à toute la hauteur due à la vitesse d'impulsion. En second lieu ce même obstacle ne permettra pas qu'il arrive à toute la distance où il serait parvenu sans cela. C'est donc à l'expérience à nous apprendre ce qu'il faut rabattre des résultats donnés par la théorie. On trouve dans la *Mécanique* de l'abbé *Marie*, le calcul d'une suite d'expériences faites sous différens degrés d'obliquité avec un canon de 24 chargé de *neuf* livres

de poudre. Voici en gros les résultats que ces expériences ont offerts.

Par un milieu pris entre plusieurs essais, on avait trouvé que la poudre imprimait au boulet une vitesse de 220 *toises* par seconde. Or en calculant d'après cela les *portées* ou *amplitudes*, sous les angles de 15, 30 et 45 degrés, par la méthode exposée ci-dessus, ou telle autre qu'on voudra, on trouve pour la première portée 4836 toises, pour la seconde 8376[t], et enfin 9672[t] pour la dernière. Mais ces portées ont été réellement et d'après l'expérience, l'une de 1675 toises seulement, l'autre de 1910[t], et la troisième de 2200[t]. On voit par là combien est grande la résistance de l'air pour de grandes vitesses, et dans quelles erreurs on peut tomber, lorsqu'on manque d'avoir égard à cet obstacle.

Un mobile poussé de bas en haut dans une direction oblique à l'horizon, et soumis en même temps à la pesanteur, doit décrire une parabole dans le vide. Mais sa route au travers du fluide atmosphérique est une courbe d'une forme et d'une nature bien différente. Les géomètres sont venus à bout de déterminer quelques-unes de ses propriétés. Mais comme il n'existe aucune règle pour la décrire, nous n'en dirons pas davantage sur ce sujet, et nous renverrons les curieux aux ouvrages des mathématiciens. On ajoutera seulement qu'il faut sur ce sujet comme sur beaucoup d'autres, consulter l'expérience dans chaque cas particulier, et s'en tenir aux résultats qu'elle aura donnés.

CHAPITRE XII.

DU CENTRE DE GRAVITÉ.

EN général, et sauf quelques exceptions, dans tout ce qui a été dit précédemment on n'a eu aucun égard au volume des corps, et on les a considérés comme réduits à l'étendue d'un point. Il faut maintenant les considérer tels qu'ils sont, c'est-à-dire comme composés d'un nombre plus ou moins grand de particules matérielles, et chercher ce qui doit résulter en Mécanique de cette considération.

1. *Définition du Centre de gravité.*

La pesanteur, comme on a vu, appartenant à toutes les parties de la matière, et ayant dans toutes la même énergie, un corps d'un volume et d'une masse quelconque, est dans le même cas, que s'il était sollicité à la fois par autant de forces *égales et parallèles*, qu'il contient de particules matérielles. Or toutes ces forces agissant dans le *même sens*, et ne pouvant se nuire à cause de leur parallélisme, il suit qu'elles ne peuvent manquer d'avoir leur effet tout entier ; et par conséquent qu'elles sont équivalentes à *une force unique* qui serait égale à leur somme, et qui agirait dans le même sens, c'est-à-dire, dans le sens de la pesanteur,

et suivant une droite verticale. Mais quelle doit être relativement au corps que l'on considère, la position de cette verticale ?

Il est facile de voir que la verticale dont il est ici question, doit traverser le corps de manière que le nombre des forces *partielles* qui agissent sur lui, soit le *même* de part et d'autre de cette droite, et en général des deux côtés opposés. Si l'on conçoit donc deux plans verticaux, menés de manière que chacun d'eux partage le corps en deux parties d'un égal poids, l'*intersection commune* de ces deux plans donnera la direction de cette force unique, qui est la *résultante* de l'action de la pesanteur sur les différentes parties du corps.

Lorsque le corps donné a une certaine régularité, la position de la droite demandée est facile à trouver. Soit pour exemple un *cube*, ou un dé, posé de manière que deux de ses faces soient parallèles à l'horizon. On mènera sur chacune de ces faces deux *diagonales* qui se croiseront, et la ligne qui unira leurs points d'intersection, sera la verticale suivant laquelle est dirigée la résultante que l'on demandait.

Si l'on renverse le corps pour le mettre dans une autre position, mais toujours telle que deux autres faces soient parallèles au plan horizontal, en faisant la même construction, on trouvera une autre droite verticale pour la direction de la résultante dans cette nouvelle position. Les deux droites se rencontreront dans l'intérieur du corps en *un point*, par lequel passera toujours la résultante de la pesanteur dans toutes les positions du corps, et qu'on appelle son *centre de gravité*. Ce point qui se trouve de la même manière, que celui que nous avons appelé le *centre des forces parallèles*,

jouit de quelques propriétés dont nous allons bientôt nous occuper.

2. *Détermination du Centre de gravité.*

On peut déterminer facilement la position du centre de gravité dans les corps géométriques.

1.° Le centre de gravité d'une droite uniformément pesante est évidemment au *milieu* de sa longueur.

2.° Le centre de gravité d'une circonférence de cercle, celui de l'aire du cercle, celui de la surface et du volume d'une sphère *homogène*, est aussi visiblement placé au *centre* du cercle ou de la sphère.

3.° Le centre de gravité d'un *cylindre* droit ou oblique, et celui d'un *prisme* quelconque, est au *milieu* de la droite qui unit les centres de gravité de ses deux bases.

4.° Le centre de gravité de l'aire d'un *triangle* est à l'intersection de deux droites menées de deux des angles sur le milieu des côtés opposés, ou ce qui revient au même, il est aux *deux tiers* à partir du sommet, de la droite menée de ce sommet sur le milieu de la base.

5.° Le centre de gravité d'une *pyramide triangulaire* est à l'intersection de deux droites menées de deux des angles solides au centre de gravité des faces opposées : ce qui donne les *trois quarts* d'une de ces droites à partir de l'angle. Il en est de même pour le centre de gravité d'une pyramide quelconque, et par conséquent pour celui du *cône*.

Toutes les propositions qu'on vient d'établir, peuvent se prouver facilement par les seuls principes de la géométrie élémentaire. Mais il est d'autres lignes, d'autres surfaces, d'autres volumes dont le centre de gravité

ne peut être déterminé que par un calcul difficile et transcendant. Nous n'en dirons rien ici, et nous croyons devoir encore renvoyer le lecteur curieux aux ouvrages des mathématiciens.

Puisque le centre de gravité d'un corps est le point par lequel passe toujours la résultante des actions que la pesanteur exerce sur ce corps, il suit que l'on peut annuler cette pesanteur, en lui opposant une seule force *équivalente, verticale, dirigée de bas en haut, et passant par le centre de gravité du corps.* Réciproquement toutes les fois que la pesanteur d'un corps se trouve détruite, ou annulée par une force quelconque, on peut être assuré que la *direction* de cette force passe par le centre de gravité du corps.

On peut tirer de là un moyen *mécanique* pour trouver le centre de gravité d'un corps donné. On suspendra ce corps par un endroit quelconque de sa surface; et lorsqu'après plusieurs balancemens il se sera fixé, on mènera par le point de suspension une ligne verticale, qui passera nécessairement par le centre de gravité du corps. On le suspendra ensuite par un autre endroit, et l'on mènera encore une verticale par le nouveau point de suspension. Celle-ci devant de même passer par le centre de gravité du corps, il est évident que *ce centre de gravité est placé au point où les deux droites se croisent.*

Lorsqu'un corps est suspendu librement, et qu'il est en repos, sa pesanteur est annulée par la résistance du point où il est suspendu. Cette résistance se fait donc sentir dans le sens vertical, et sa direction passe par le centre de gravité du corps.

Le centre de gravité d'un corps, d'après ce qu'on a

dit plus haut, est *un point autour duquel toutes les parties du corps sont en équilibre entre elles dans toutes les positions que peut prendre le corps.* L'on peut donc encore trouver ce centre de gravité par le procédé suivant. On posera sur un plan horizontal, ou à peu près, un *prisme triangulaire* couché sur une de ses faces : plaçant ensuite sur son *arête* supérieure le corps dont on veut avoir le centre de gravité, on parviendra en tâtonnant à le mettre en équilibre sur cette arête. Les choses étant ainsi disposées, il est visible que le centre de gravité du corps se trouve appuyé; et en menant sur ce corps que l'on suppose fort mince, une ligne droite selon l'arête du prisme, cette droite passera par le centre de gravité cherché. On changera ensuite la position du corps, et on le mettra encore en équilibre dans cette nouvelle position. Traçant alors une seconde droite avec les mêmes conditions que tout à l'heure, il est évident que le *centre de gravité demandé sera à l'endroit où les deux droites se rencontrent.* Si le corps donné a une certaine épaisseur, l'on fera la même opération sur les deux faces opposées; et joignant les deux points trouvés, le centre de gravité sera sur la droite qui les unit. Il est encore à l'intersection des verticales menées par les deux points trouvés.

Lorsque le centre de gravité d'un corps est trouvé, si l'on suspend le corps par ce point, il se tiendra en équilibre dans toutes les positions où on voudra le mettre ; et par conséquent on peut considérer *le poids du corps comme concentré tout entier en ce point.* Aussi dit-on quelquefois que le centre de gravité d'un corps est le point où toute la pesanteur du corps paraît résider.

Le centre de gravité d'un corps peut être dans

la pesanteur aura tout son effet, ou seulement une partie de son effet, ou enfin elle sera totalement annulée. Si donc un corps est posé sur un plan horizontal, il y demeurera en repos, lorsque *la verticale abaissée de son centre de gravité, rencontrera le plan en quelque point appartenant à la base du corps.* Mais si cette verticale tombe hors de la base, rien ne pouvant empêcher que le centre de gravité ne s'approche du plan, il s'en approchera en effet, et le corps sera renversé.

Si le corps est soutenu sur plusieurs pieds, sa base est alors tout l'espace compris par les droites, qui unissent l'un à l'autre les pieds voisins, et la verticale du centre de gravité doit tomber dans cet espace, pour que le corps reste dans sa position. Quand le corps n'a que *deux* pieds, il faut que la verticale rencontre quelque part et en dedans, la droite qui les unit. Enfin si le corps ne touche le plan que par *un seul point*, il est nécessaire alors pour qu'il ne tombe pas, que le centre de gravité soit posé verticalement au-dessus de ce point.

Un corps est en repos sur un plan horizontal, lorsque la condition dont on vient de parler, est remplie. Il pourrait paraître pencher, et même prêt à être entraîné par la pesanteur, sans qu'il y eût néanmoins rien à craindre à cet égard. C'est ainsi que les fameuses tours de *Pise* et de *Bologne* subsistent depuis bien des siècles, quoique elles soient inclinées sur leurs bases, la première de *quinze pieds*, et la seconde de *plus de douze.* Toutes les parties de ces édifices étant solidement unies entre elles, et ne faisant qu'un tout, il en résulte que la verticale abaissée du centre de gravité

de ce tout, rencontre le plan horizontal en quelque point de sa base, et lui donne ainsi un appui inébranlable.

Un corps qui repose sur un plan horizontal, peut avoir plus ou moins de *stabilité* : cela dépend du chemin que la verticale du centre de gravité, autrement dite, *ligne de direction*, est obligée de faire pour tomber hors des appuis du corps. Les cônes, les pyramides dans leur situation ordinaire, sont les corps les plus *stables*, parce que leur centre de gravité est placé le plus bas, et que leur base ayant beaucoup de largeur, la ligne de direction ne peut tomber hors de cette base, à moins d'une secousse extrêmement violente.

Plus la base d'un corps est étroite, *plus* son centre de gravité est élevé, et *moins* ce corps a de stabilité. Il arrive même lorsque la base se réduit à un point, qu'il devient impossible de mettre le corps en équilibre sur une aussi petite surface ; et quoique rigoureusement parlant, on conçoive la possibilité de placer le centre de gravité du corps justement au-dessus du point d'appui, néanmoins la chose ne pourra pas se faire, parce que la moindre agitation doit porter la ligne de direction hors de ce point, et précipiter le corps : c'est ainsi qu'on ne saurait faire tenir un cône droit sur sa pointe.

Le centre de gravité du corps humain a été trouvé dans le bas-ventre, à peu près au milieu du bassin : c'est là qu'est placé le centre de gravité de la masse entière. D'ailleurs chaque partie a aussi son centre de gravité propre. C'est du premier qu'il faut abaisser la ligne de direction pour juger de la stabilité de notre corps. Lorsque nous voulons qu'elle soit la plus grande

possible, comme quand il est question de résister à un choc ; nous avons soin d'écarter nos pieds, et de les poser en diagonale, afin de nous procurer une plus large base, et de pouvoir plus facilement maintenir notre ligne de direction sur l'étendue de cette base.

La position du centre de gravité de notre corps éprouve quelque petite variation, selon la manière dont ses parties mobiles sont disposées. Ainsi lorsque nous venons à chanceler, et que nous nous sentons prêts à être entraînés de quelque côté par la pesanteur, nous avons soin de porter brusquement du côté opposé toutes les parties libres et mobiles de notre corps, afin de ramener le centre de gravité au-dessus de la base, et d'annuler ainsi l'effet de la pesanteur. C'est de la même manière que les *danseurs de corde* marchent sur une ligne fort étroite, en s'aidant d'un balancier, ou seulement de leurs bras, pour maintenir leur ligne de direction sur la corde, et l'y ramener lorsqu'elle s'en écarte de quelque côté. De même lorsque nous voulons pencher notre corps en avant ou en arrière, il faut pour l'équilibre que quelques parties soient portées dans le sens contraire; et si cela ne se peut pas, le mouvement que nous voulions faire, devient impossible à exécuter, ou il nous entraîne tout-à-fait, et nous précipite à terre.

Lorsque nous marchons, ou que nous courons, la ligne de direction se porte alternativement sur l'un et l'autre pied ; et la route que trace notre centre de gravité, est une *ligne brisée*. Il est facile de reconnaître ce balancement de notre corps, en arrêtant notre regard sur quelque objet long et menu placé devant nous, et rapporté à des objets plus éloignés.

Lorsqu'un corps est appuyé sur un plan incliné à l'horizon, la verticale abaissée de son centre de gravité n'étant plus perpendiculaire au plan, il suit que l'action de la pesanteur ne saurait être entièrement détruite, et que le corps doit descendre, comme on l'a expliqué plus haut. Il *glissera* simplement le long du plan, si la ligne de direction tombe sur la base du corps : il *se renversera*, si elle tombe en dehors. Un corps pesant ne peut demeurer en repos sur un plan incliné, qu'autant qu'il est retenu par le frottement, ou par quelque autre force. Les conditions de l'équilibre dans ce cas trouveront leur place dans la deuxième Section de cet ouvrage.

5. *Effets remarquables dépendans de la position du centre de gravité.*

Puisque tout le poids d'un corps peut être considéré comme réuni à son centre de gravité, il suit qu'un corps doit demeurer en repos, toutes les fois que son centre de gravité est soutenu; et qu'il doit se mettre en mouvement pour tomber, sitôt que ce point manque de soutien. C'est d'après ces principes qu'on pourra facilement rendre raison des effets suivans.

Premièrement. On prend une petite figure d'ivoire ou d'émail, qui se termine par le bas en une pointe un peu mousse. Comme on l'a observé tout à l'heure, il ne serait guère possible de la faire tenir toute seule sur une base aussi étroite. Mais on y parviendra facilement en l'armant de deux balles de plomb, placées une à droite et l'autre à gauche, et descendant au moyen de fils de fer inflexibles un peu plus bas que le

pied de la figure. Avec cette addition non-seulement la figure se tiendra droite et en équilibre : mais elle sera en état de se maintenir en situation malgré les petites secousses qu'on pourra lui donner ; et quelque *inclinaison* qu'on lui fasse prendre sur son support, on la verra toujours se relever, sitôt qu'elle sera abandonnée à elle-même, et se fixer dans la position verticale, après avoir fait un certain nombre d'oscillations.

Lorsque la figure est *non-armée*, son centre de gravité est *au-dessus* du seul point d'appui qu'elle a ; et dans ce cas loin qu'il puisse y avoir stabilité, l'équilibre *physique* n'est pas même possible. Mais lorsqu'elle est chargée de ces deux balles de plomb disposées comme on a dit, alors le tout qui en résulte, se trouve avoir son centre de gravité beaucoup plus bas, et *au-dessous* de ce point d'appui : la figure se tient donc droite, et en repos. Si on l'incline dans quelque sens, les balles et le centre commun de gravité s'élèvent du côté opposé ; et comme celui-ci tend toujours à descendre, il descend en effet dès qu'il est libre, et la figure se redresse. En revenant à la ligne de son repos, le centre de gravité fait des oscillations comme un pendule ; et la figure en fait pareillement en sens contraire, avant de se fixer dans la position verticale.

C'est d'après les mêmes principes, et par un moyen semblable qu'on peut faire tenir un corps sur une pointe ou une vive arête, quoique ce corps soit tout-à-fait en dehors de son appui, et qu'il ne le touche que par un point. On lui ajoute pour cela d'autre corps, dont le poids semblerait devoir l'entraîner encore plus vite, mais dont la disposition est telle que le centre de gravité commun, qui est un point invisible, se

trouve placé dans l'espace justement au-dessous de celui par lequel le corps donné touche son appui. Ce corps ne peut tomber, sans que tous ceux qui lui sont liés ne tombent en même temps ; et pour que cette chute pût avoir lieu, il faudrait que le centre de gravité du système commençât par s'élever, ce que la pesanteur ne saurait faire. On suppose que quelques précautions ont été prises pour empêcher le système de descendre en glissant.

Deuxièmement. On propose de construire un seau qui se vide de lui-même lorsqu'il est plein, et qui se redresse ensuite lorsqu'il est vide. *Solution.* Il suffit pour cela de donner au seau une forme un peu conique, et d'en faire le fond d'une suffisante pesanteur. Il est visible que le centre de gravité d'un pareil seau est en deux points différens de sa hauteur, selon qu'il est vide, ou qu'il est plein. On le suspendra donc par *deux points* placés entre ceux qu'occupe le centre de gravité dans ces deux circonstances. Ainsi lorsque le seau sera plein, le centre de gravité étant placé plus haut, et au-dessus des points de suspension, à la moindre agitation le seau tournera, et l'eau se répandra. Le seau s'étant vidé, ce même centre de gravité se rapprochera du fond qui est en haut, et se trouvera encore ainsi au-dessus des mêmes points : il faudra donc que le seau tourne une seconde fois, et qu'il se redresse, ce qui lui permettra de se remplir de nouveau, et de refaire le même jeu. Notre seau se remplira donc et se videra tout seul, comme on le demandait.

Troisièmement. On propose de construire une lampe qu'on puisse faire rouler dans tous les sens, sans que l'huile se répande. *Solution.* Pour satisfaire

à cette question, on prend une petite boîte cylindrique qu'on leste avec une semelle de plomb, pour amener le centre de gravité le plus bas possible, et tenir ainsi la boîte dans une position verticale. On suspend d'ailleurs cette lampe par deux points opposés, au centre d'un anneau de métal, de manière qu'elle puisse se maintenir droite, dans les diverses inclinaisons de l'anneau. Celui-ci est suspendu de la même manière dans un second anneau, et l'on a soin que les lignes de suspension se croisent à angles droits. On renferme le tout dans une sphère à jour, que l'on peut faire rouler, sans que la lampe se renverse jamais à cause de son lest, et de ses quatre points de suspension. Cet appareil s'appelle *la lampe de Cardan*, du nom de son inventeur. Les *boussoles* de mer sont suspendues de la même manière, pour pouvoir se maintenir dans une position horizontale, à toutes les inclinaisons du navire.

Quatrièmement. Si l'on prend une tranche cylindrique de bois d'un grand diamètre, et qu'on y introduise vers la circonférence un petit rouleau de plomb, on verra ce cylindre *monter* le long d'un plan incliné, si on le pose sur ce plan de manière que la petite masse de plomb se trouve dans la partie supérieure du cylindre, et un peu au-delà de la verticale menée par son centre de figure. Mais ce mouvement d'ascension ne peut avoir lieu, que pour une demi-révolution du cylindre. Le corps monte jusqu'à ce que son centre de gravité, qui n'est pas ici le même que son centre de figure, soit descendu au point le plus bas.

L'on a encore deux règles étroites formant entre elles un *angle*, qui peut s'ouvrir plus ou moins, et

dont le plan s'élève un peu du sommet à la base. Vers la pointe de l'angle on pose sur ces règles un corps fait en forme de *fuseau*, composé de deux *cônes* appliqués l'un à l'autre par leurs bases ; et aussitôt on voit ce corps tourner sur lui-même, pour monter le long des règles, et s'avancer du côté où l'angle est ouvert. Le fuseau paraît donc s'élever, et se mouvoir contre les lois de la pesanteur. Cependant avec quelque attention on reconnaît bien vîte que le corps est réellement descendu, et que la pesanteur a eu ici comme partout, son effet naturel.

Le centre de gravité du *double cône* est placé au milieu de la droite qui joint les deux sommets. Les points par lesquels le corps repose sur les deux côtés de l'angle, sont en deçà du plan vertical mené par cette droite. Le centre de gravité qui n'est pas soutenu, doit donc tomber, et il tombe en effet, ce qui oblige le fuseau de rouler sur lui-même et de s'approcher de l'ouverture de l'angle. Lorsqu'il est posé près du sommet, son axe est plus élevé : il est plus bas, lorsque le corps s'en éloigne ; de façon que quoique celui-ci ait paru monter le long du plan incliné, le point où réside sa pesanteur, est réellement descendu, comme l'exige cette force.

Cinquièmement. Le déplacement alternatif du centre de gravité dans des corps qui ont quelques parties mobiles et changeantes, peut produire des mouvemens singuliers et tout-à-fait curieux. On connaît ces petites figures *chinoises*, qui font d'elles-mêmes, et sans aucune action étrangère, plusieurs culbutes successives, le long de petits gradins convenablement proportionnés. On pose la figure sur le gradin supérieur, de manière qu'elle soit renversée la tête en bas, s'appuyant à la fois

sur ses pieds et sur ses mains. Aussitôt on la voit tourner sur elle-même : son corps passe par-dessus sa tête, et elle va poser ses pieds sur le second gradin. Dès qu'elle est arrivée à cette position, son corps se renverse de nouveau, et les mains vont s'appuyer sur le même gradin. Revenue d'elle-même à la position qu'on lui avait donnée en commençant, elle fait une nouvelle culbute, et continue ainsi tant qu'il y a de degrés à descendre.

La figure est divisée intérieurement par une cloison oblique, percée de deux petits trous, et elle contient un peu de mercure, qui est un fluide très-lourd. Lorsqu'elle a la tête en bas, le mercure vient naturellement s'y placer, et le centre de gravité se trouvant alors au-delà des mains qui sont les points d'appui, il faut que le corps tombe en tournant sur ces mêmes appuis. La figure vient donc se poser sur ses pieds : mais alors le mercure passe dans la partie inférieure du corps, et il y transporte le centre de gravité, qui entraîne la figure, la fait tourner de nouveau, et ramène la tête en bas. Les choses recommencent alors dans le même ordre. Les épaules et les cuisses de la figure sont unies les unes aux autres par des fils qui passent sur de petites poulies, et font que leurs mouvemens se correspondent parfaitement.

CHAPITRE XIII. (*)

DU MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ.

LORSQU'UNE puissance quelconque agit sur un corps suivant une droite qui passe par le centre de gravité de ce corps, la vitesse qu'elle est capable de communiquer, se distribue *également* à toutes les molécules dont le corps est composé, et elles se meuvent toutes parallèlement entre elles, et avec des vitesses égales. Il est évident qu'il n'y a ici aucune raison pour que les molécules qui sont d'un côté, prennent plus ou moins de vitesse, que celles qui sont du côté opposé. L'impulsion passant par *le centre des forces parallèles*, le mouvement du corps se fera d'une manière uniforme, suivant une ligne droite, et sans que les molécules éprouvent aucun changement dans leurs situations rélativement au centre de gravité. Leur vitesse commune sera égale *à celle que la puissance est capable de communiquer à une seule molécule*, *divisée par le nombre*

(*) Je préviens le lecteur que ce qui suit jusqu'à la fin de cette première section est un peu abstrait. Cependant on remarquera facilement, j'espère, que les choses ne pouvaient guère être présentées avec plus de clarté et de simplicité.

de ces molécules, ou ce qui est la même chose, *par la masse du corps.*

Pareillement lorsque des puissances *égales* et *parallèles* agissent sur les différentes molécules dont un corps est composé, l'effet est le même que si *une seule puissance égale à la somme de celles-là*, agissait dans le même sens sur le centre de gravité du corps, dont toute la masse, comme on sait, peut être considérée comme concentrée en ce point. Le mouvement se fera donc de la même manière que si le centre du corps était *uniquement* et *immédiatement* soumis à cette dernière puissance.

Mais si les forces qui sollicitent les différens points d'un corps, étant toujours *parallèles* et dirigées dans le *même* sens ne sont pas *égales* entre elles ; alors pour savoir ce qui doit résulter de leur action relativement au centre de gravité du corps, il est nécessaire que nous considérions auparavant un *système* de points matériels, qui seraient indépendans les uns des autres, et soumis à des forces *parallèles* et *inégales*.

1. *Mouvement du centre de gravité d'un système de corps dans le cas des forces parallèles.*

Soient plusieurs points matériels A, B, C, etc. (fig. 38) mus *uniformément* suivant les droites parallèles aa' bb', cc', etc. avec des vitesses différentes V, V', V'', etc. : on demande quel sera le mouvement du centre commun de gravité de tous ces corps.

Je dis d'abord que le centre de gravité sera mû sur une droite *parallèle* aux droites aa', bb', etc. En effet si l'on unit le point A, par exemple, avec le point B

par des lignes droites dans toutes leurs positions *successives* et *simultanées*, le lieu de leur commun centre de gravité divisera toutes ces droites de la *même manière :* ce qui place tous les points de division sur une *même* droite parallèle à celles que ces corps décrivent. Il est clair que la même chose doit avoir lieu pour le centre de gravité d'un nombre de corps quelconque, qui se meuvent sur des lignes parallèles entre elles. Le centre de gravité de notre système A, B, C, ne quittera donc point la droite gg'.

Je dis en second lieu que le mouvement de ce centre de gravité se fera avec une vitesse *uniforme.* Pour le prouver, supposons qu'au bout d'un certain temps t, les mobiles qui étaient d'abord en A, B, C, et dont le centre commun de gravité était en G, soient parvenus en A′, B′, C′, et que leur centre de gravité soit arrivé en un certain point G′. Comme ce centre est censé réunir les trois masses, il faut que sa quantité de mouvement, soit égale à la somme des quantités de mouvement des trois mobiles. Or les vitesses étant supposées uniformes, sont proportionnelles au temps t. L'espace GG′ que parcourt le centre de gravité, est donc aussi proportionnel à ce temps. Donc sa vitesse est uniforme, et elle est de plus *égale à la somme des produits de chaque masse multipliée par sa vitesse propre, cette somme étant divisée par la somme des masses.* (1)

---

(1) Soit G la somme des trois masses censées réunies au centre de gravité, on aura donc : $G \times GG' = A \times AA' + B \times BB' + C \times CC'$; ou parce que AA′, BB′, CC′ sont les espaces parcourus pendant le même temps t avec les vitesses V, V′, V″ on aura, $G \times GG' = (AV + BV' + CV'')\, t$;

De ce qu'on vient d'établir on peut conclure que le mouvement et la vitesse du centre commun de gravité dans le cas que nous considérons ici, sont les mêmes que si les puissances qui animent les mobiles A, B, et C, avaient agi uniquement et immédiatement sur ce centre de gravité. (2)

2. *Mouvement du centre de gravité commun dans le cas de forces quelconques.*

Passons maintenant au cas plus général, où les puissances qui sollicitent les différens points du système, ne sont ni égales, ni parallèles, mais où elles sont, comme on dit, *quelconques*. Dans ce cas chacune de ces forces peut, ainsi qu'on l'a vu (1) être décomposée *en*

---

par où l'on voit que GG′ croît dans la même raison que t. En appelant U cette vitesse du centre de gravité, on tirera de là : $U = \frac{AV + BV' + CV''}{A + B + C}$, ce qui est l'expression traduite dans le texte.

(2) En effet la puissance qui peut donner au mobile A la vitesse V, ne pourra communiquer au centre G où les trois masses paraissent résider, que la vitesse $\frac{AV}{A+B+C}$. De même celle qui donne à B la vitesse V′, ne donnerait appliquée à G que la vitesse $\frac{BV'}{A+B+C}$; et ainsi pour la troisième. Donc ces puissances en agissant directement sur ce point, lui auraient communiqué la vitesse $\frac{AV + BV' + CV''}{A + B + C}$, qui est justement la vitesse trouvée du centre commun de gravité.

(1) Voyez à la fin la Note (*b*).

trois forces parallèles à trois droites passant par un même point, et perpendiculaires entre elles. On pourra par exemple, considérer le mobile A comme sollicité en même temps par trois forces F, F′, F″ parallèles à ces trois droites, et telles que leur résultante soit en effet la force qui agit réellement sur ce mobile. De même le point B sera soumis à trois autres forces parallèles chacune à chacune des trois précédentes, et qui produiraient par leur concours la force unique qui agit en B. On dirait la même chose de tous les autres points matériels dont l'ensemble compose le système que l'on considère.

Maintenant toutes les forces F qui sont appliquées aux différens points du système, étant parallèles entre elles, sont dans le cas déjà traité; c'est-à-dire qu'à cet égard le centre de gravité est sollicité comme si toutes ces forces F lui étaient immédiatement appliquées. Il en est de même pour les forces parallèles F′ et F″. Donc toutes les puissances qui agissent sur les différentes parties du système, se réduisant à ces trois ordres de forces, et chacun de ces ordres sollicitant le centre de gravité commun de la même manière que s'il était appliqué à ce point, il suit que *dans tous les cas, et quelles que soient les forces qui agissent sur les différens points d'un système de corps libres et indépendans, le centre commun de gravité de tous ces corps doit se mouvoir, et se meut en effet de la même manière que si ces forces lui étaient uniquement et immédiatement appliquées.* Ainsi la *direction* de son mouvement sera celle de la résultante de toutes ces forces considérées comme appliquées à ce point. Quant à sa *vitesse*, elle sera égale à celle que cette résul-

tante pourrait faire naitre dans une certaine masse prise pour unité, *divisée* par la somme de toutes les masses qui composent le système en question, évaluées en unités de la même espèce.

Le mouvement du centre de gravité se fait encore de la même manière dans un système dont toutes les parties sont intimément liées, et ne peuvent se mouvoir les unes sans les autres. En effet les points A, B, C étant unis entre eux d'une manière invariable, la puissance qui agit sur A par exemple, et qui lui aurait imprimé la vitesse u, si ce point avait été libre, ne lui fera prendre, je suppose, que la vitesse u'; à cause de l'obstacle qui résulte de la liaison de ce point avec les autres points du système. L'on pourra donc concevoir le point A comme sollicité à-la-fois par *deux forces*, dont l'une tendrait à lui communiquer la vitesse u' qu'il aura réellement, et l'autre une vitesse u'' qui sera détruite par l'obstacle, ces deux vitesses étant telles que la vitesse imprimée u soit en effet la résultante de ces deux-là. En raisonnant de même pour tous les autres points du système, on voit que l'on pourra ici considérer *deux ordres de forces ;* les unes qui se détruisent mutuellement, et qui ne peuvent par conséquent produire aucun mouvement dans le centre de gravité du système ; et les autres qui auront leur entier effet, et qui agissent sur les différens points comme s'ils étaient tout-à-fait libres. D'où il suit que tout ce qui vient d'être dit touchant le mouvement du centre de gravité dans le cas de l'*indépendance*, doit encore avoir lieu pour le cas où toutes les parties *ne sont point libres*, et demeurent unies sous une forme invariable.

3. *Mouvement du centre de gravité d'un seul corps.*

L'application de ce qu'on vient de dire, au cas d'un corps solide d'une masse et d'un volume quelconques, est évidente par elle-même. Quelles que soient les forces qui sollicitent les différens points d'un tel corps, il est certain que le centre de gravité de ce corps se trouvera soumis à l'influence de toutes ces forces, et qu'il sera mû tout comme si elles agissaient immédiatement sur lui.

Soit donc un corps M (fig. 39) frappé suivant une direction AB qui ne passe pas par son centre de gravité G. Je dis que ce centre de gravité se mettra en mouvement dans une direction parallèle à AB; et que sa vitesse sera la même que s'il avait immédiatement reçu cette impulsion. En effet on peut supposer que les différentes forces dont il était question dans l'article précédent, sont réduites à zéro, à l'exception d'une seule; et ce qui a été démontré relativement au centre de gravité n'en sera pas moins vrai. Ainsi le centre de gravité du corps M avancera parallèlement à AB, et tout autant qu'il l'aurait fait, s'il avait lui-même reçu le choc. Sa vitesse sera, comme on a dit, égale à celle que la puissance peut communiquer à l'unité de masse, divisée par le nombre de ces unités contenues dans la masse du corps.

Tel est l'effet de l'impulsion supposée sur le centre de gravité du corps. Pour réduire ce centre de gravité au repos, il suffirait de lui appliquer en même temps une force CD égale à l'impulsion, mais dirigée en sens contraire. Le mouvement *progressif* du centre de

gravité se trouvant ainsi arrêté, celui du corps le serait pareillement. Mais il ne faudrait pas croire pour cela que toutes ses parties fussent amenées à l'état de repos, et que la puissance fût totalement détruite. Les deux forces AB, CD sont bien *égales*, agissent bien en des sens *contraires*; mais elles ne sont pas *directement* opposées : elles ne sauraient donc se détruire complètement. La force ou l'obstacle qui appliqué en G, suffit pour empêcher le mouvement de *progression* du corps, n'empêche pas que les parties de ce corps ne puissent tourner autour de ce point, et que le corps ne prenne ainsi un mouvement de *rotation* sur lui-même. Cet effet qui arrive quand le centre de gravité est arrêté, a également lieu lorsque rien ne l'empêche d'obéir à l'impulsion reçue; de façon que le corps, dans le cas que nous considérons, est à-la-fois animé d'*un double mouvement* produit par la même puissance; mouvement de *progression* qui se fait comme si l'impulsion avait passé par le centre de gravité, et mouvement de *rotation* qui a lieu comme si ce centre de gravité était immobile. C'est ce dernier mouvement qui nous reste à déterminer.

CHAPITRE XIV.

DU MOUVEMENT DE ROTATION.

1. *Le système étant retenu par un axe fixe.*

CONSIDÉRONS d'abord trois points matériels A, B, C, liés entre eux d'une façon invariable, et retenus par un axe fixe, perpendiculaire au plan qui les renferme, et passant par leur centre commun de gravité. Concevons que ces trois mobiles sont sollicités par une force unique agissant parallèlement à ce plan. Cela posé il est facile de voir que le *moment* (1) de cette force pris relativement à l'axe fixe, doit être égal à la *somme des momens* des trois mobiles animés chacun de leurs vitesses particulières. En effet quelle que soit la vitesse de rotation que prendra chaque mobile, il est certain que le mouvement cesserait, et que l'équilibre aurait lieu, si on appliquait à chacun d'eux une force égale et opposée

(1) On appelle *moment* d'une force, le *produit* de cette force par la distance de sa direction à un point, ou à une droite, ou à un plan pris à volonté. Ce mot vient du latin *momentum* qui veut dire *grandeur*, importance; et en effet le moment d'une force fait connaître sa grandeur relativement au point, ou à la droite, ou au plan auquel on la rapporte.

à celle dont il est animé. Donc les forces qui animent ces mobiles, prises en sens contraire, doivent être égales à la puissance qui agit sur eux. Mais ces forces, ainsi que la puissance, doivent s'estimer par rapport à l'axe autour duquel se fait le mouvement. Donc les *momens* des unes et de l'autre pris par rapport à cet axe, doivent être égaux.

En partant de ce principe, et en supposant, comme nous l'avons fait, que la puissance agit dans un plan perpendiculaire à l'axe, on trouve que la vitesse de rotation du point qui est éloigné de cet axe d'une quantité égale à l'*unité*, est elle-même égale *au moment de la puissance divisé par la somme des produits de chaque masse multipliée par le quarré de sa distance au même axe.* (2)

Pour rendre cette règle plus facile à saisir, donnons un exemple. Supposons que les masses A, B, C soient exprimées par les nombres 1, 3, 5; et que leurs distances à l'axe fixe passant par leur centre commun de gravité, le soient par les nombres 2, 3 et 4. Supposons

---

(2) Soit P la puissance, et D la distance de sa direction à l'axe fixe; si V est la vitesse de rotation du point qui est éloigné de l'axe d'*une* unité, et que r, r', r'' expriment les distances à cet axe des points A, B, C; les vitesses de rotation de ces points seront Vr, Vr', Vr''; les forces qui les animent seront exprimées par $A \times Vr$, $B \times Vr'$, $C \times Vr''$; et les momens de ces forces par rapport à l'axe seront; AVr^2, BVr'^2, CVr''^2; par conséquent, et d'après le principe établi, on aura l'équation : $PD = AVr^2 + BVr'^2 + CVr''^2$; d'où l'on tire pour la vitesse, $V = \frac{PD}{Ar^2 + Br'^2 + Cr''^2}$, comme on l'a établi dans le texte.

encore que la puissance unique qui agit sur elles parallèlement au plan qui les contient, et auquel cet axe est perpendiculaire, soit capable de faire parcourir en une seconde, et à une masse égale à l'*unité*, un espace exprimé par 10; et qu'enfin sa direction passe à une distance de l'axe égale à 5. On trouvera que la vitesse de rotation à l'unité de distance est pour ce cas égale *à* 10 *multiplié par* 5, *et divisé par la somme des nombres* 4, 27 *et* 80; c'est-à-dire qu'elle est de $\frac{50}{111}$, ou que le point en question achèverait une révolution autour de l'axe en *treize secondes et deux tiers*. Ce serait aussi là le temps nécessaire pour que tout le système fît un tour entier autour de cet axe.

2. *Le système étant libre.*

Si les trois points A, B, C étant toujours unis invariablement entre eux, formaient néanmoins un *système libre*, et qui ne fût retenu par aucun axe fixe; alors en supposant que la force qui agit sur eux, passe par leur centre commun de gravité, le système serait mu comme un corps solide dans le même cas; c'est-à-dire qu'il n'aurait d'autre mouvement qu'un mouvement de progression sans tourner autour d'aucun point quelconque. Mais si la direction de la puissance ne passe pas par le centre de gravité commun, alors outre le mouvement progressif qui aura lieu, ainsi qu'on a dit, nous savons que le système prendra de plus un mouvement de rotation autour de ce centre, et que ce mouvement se fera de la même manière que si ce point était fixe. La vitesse de rotation se déterminera donc comme dans le cas précédent, et elle sera encore

égale au moment de la puissance pris par rapport au centre commun de gravité, divisé par la somme des masses multipliées chacune par le quarré de sa distance à ce point.

Soient deux sphères A et B de masses quelconques, unies l'une à l'autre au moyen d'une droite qui passe par leurs centres, et qui est sans pesanteur. Concevons que ces deux sphères reçoivent en même temps et dans le même sens perpendiculairement à AB, chacune une impulsion différente dirigée par leur centre particulier. D'abord le centre commun sera mû comme s'il avait reçu lui-même ces deux impulsions. Ainsi la masse A étant supposée peser *dix* onces, et la masse B *cinq* onces seulement; l'impulsion donnée à la première étant capable de lui faire parcourir *douze* pouces par seconde, et celle reçue par la dernière masse pouvant lui donner une vitesse de *huit* pouces dans le même temps, on trouvera facilement que la vitesse progressive du centre commun de gravité sera dans ce cas de *dix pouces et deux tiers* par seconde. Les deux sphères auront aussi *en avant* la même vitesse de *dix* pouces et *deux tiers*; par où l'on voit que leur dépendance mutuelle est cause que la vitesse de A est plus petite, et celle de B plus grande qu'elles n'auraient été, si ces deux corps se fussent trouvés libres l'un et l'autre.

Mais les deux sphères en avançant commenceront aussi à tourner autour de leur centre commun de gravité. D'après le rapport supposé des masses, ce point est placé du côté de A au *tiers* de la droite qui joint les centres des sphères. Maintenant si leur distance mutuelle est de *neuf* pouces, l'impulsion sur la sphère A communiquerait au système une vitesse de rotation, qui se trouve en

multipliant 120 par 3, et *divisant* le produit par 90 *plus* 180, ou 270 : cette vitesse serait donc de *quatre tiers* de pouce par seconde. Pareillement l'impulsion sur B ferait prendre à ce même système une vitesse en sens contraire de *huit neuvièmes* de pouce. Retranchant donc ces deux vitesses l'une de l'autre, il reste *quatre neuvièmes* de pouce pour la vitesse réelle de rotation dans le sens de l'impulsion imprimée à la sphère A : c'est-à-dire que le point qui est placé sur AB à l'*unité* de distance du centre commun de gravité, doit tourner autour de ce point avec une vitesse de *quatre neuvièmes* d'unité par seconde; et qu'il achèvera par conséquent une révolution entière dans un peu plus de *quatorze* secondes. Ce sera là aussi le temps qu'il faudra aux deux sphères pour tourner autour de leur centre commun; et après avoir fait une révolution entière, elles continueront de *tourner sans cesse*, tant qu'aucune force étrangère ne viendra point altérer ou troubler ce mouvement. C'est ainsi que les choses se passent dans les espaces célestes : c'est ce qui a lieu pour la lune et la terre, qui liées l'une à l'autre par la loi de l'attraction, avancent continuellement dans leurs orbites autour du soleil, tout en tournant sans relâche autour de leur commun centre de gravité.

3. *Du moment d'inertie.*

Appliquons ce qui vient d'être dit, au cas d'un seul corps solide d'un volume quelconque, et supposons d'abord que ce corps est libre. En le frappant suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité, il prendra comme nous savons, outre le mouvement progressif, un mouvement de rotation dont la vitesse

sera exprimée par le *quotient du moment de la puissance* pris par rapport à ce centre de gravité, et divisé par *la somme des particules matérielles du corps, multipliées chacune par le quarré de sa distance à ce même centre*, ou plutôt à un axe perpendiculaire qui passerait par ce point. Cette somme s'appelle *le moment d'inertie* du corps considéré par rapport à son centre de gravité. (1)

Si le corps n'est point libre, et qu'il soit en effet retenu par un axe fixe; alors le mouvement de progression est nul, et il ne reste plus que le mouvement de rotation autour de l'axe. La vitesse de ce mouvement aura la même expression que tout à l'heure, si l'axe passe par le centre de gravité du corps, et que l'impulsion soit donnée dans un plan perpendiculaire à cet axe. Mais si l'axe fixe est placé tout autre part, même hors du corps, pourvu qu'un de ses points soit lié d'une manière invariable avec ce corps, et qu'il soit toujours perpendiculaire au plan de l'impulsion; le mouvement de rotation, qui est encore le seul qui puisse avoir lieu dans le cas présent, se déterminera aussi comme on vient de faire, c'est-à-dire qu'on en aura la vitesse, en divisant le moment de la puissance

---

(1) D'après ce qu'on a vu ci-devant, la vitesse de rotation dans le cas d'un corps solide est, $V = \frac{PD}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}}$ m, m', m'' etc. sont les masses des différentes particules du corps; r, r', r'' etc. sont les distances de ces particules à l'axe de rotation, et $mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}$, est le *moment d'inertie* du corps par rapport à cet axe.

pris par rapport à l'axe fixe, par le moment d'inertie du corps calculé relativement au même axe. (2)

Pour déterminer la vitesse de rotation perpendiculairement autour d'un axe quelconque, il faut donc pouvoir trouver la valeur des produits de chacune des particules matérielles du corps multipliée par le quarré de sa distance à l'axe. Or la chose présente souvent de très-grandes difficultés, et ne peut jamais s'effectuer qu'à l'aide du calcul. On a observé que cette recherche devenait moins difficile, quand elle était relative à un axe, qui passait par le centre de gravité du corps; et l'on s'est de plus assuré que, quel que soit le point dans le corps, ou hors du corps, par lequel passe l'axe fixe, *le moment d'inertie relatif à cet axe était toujours composé du moment d'inertie pris par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité*, plus *du produit de la masse du corps multipliée par le quarré de la distance qui sépare les deux axes.* (3)

---

(2) d, d', d'' etc. étant les distances des particules à cet axe quelconque, le moment d'inertie relativement à cet axe sera exprimé par la somme $md^2 + m'd'^2 + m''d''^2 +$ etc.

(3) D'après ce qu'on vient de dire, on doit avoir : $md^2 + m'd'^2 + m''d''^2 +$ etc. $= mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 +$ etc. $+ MA^2$. M est la masse du corps, et A est l'intervalle qui sépare les deux axes. La vitesse de rotation autour de l'axe supposé, qui est $\frac{PD}{md^2 + m'd'^2 + \text{etc.}}$; sera donc aussi exprimée par $\frac{PD}{mr^2 + \text{etc.} + MA^2}$; ou, parce que toutes les particules d'un même corps sont censées avoir la même masse, on aura V =

Toute la difficulté se réduit donc à trouver le moment d'inertie d'un corps relativement à un axe quelconque passant par son centre de gravité ; et comme l'on ne peut jamais y parvenir, lorsque la chose est possible, qu'en employant des procédés de calcul qui ne sont pas dans notre plan, nous nous contenterons de donner ici la valeur du moment d'inertie pour quelques cas très-simples, qui sont aussi justement ceux qui se présentent le plus fréquemment, et qu'on a pour cela plus de besoin de connaître.

4. *Valeur du moment d'inertie dans quelques cas.*

I. *Le moment d'inertie d'une droite* uniformément pesante pris par rapport à un axe perpendiculaire mené par le milieu de sa longueur *est égal au tiers de sa masse multipliée par le quarré de sa demi-longueur.* (1)

II. *Le moment d'inertie d'une circonférence de cercle, ou d'un anneau circulaire* d'une épaisseur uniforme, tournant autour d'un axe perpendiculaire à son plan, et qui passe par son centre, *est égal à la*

$\frac{PD}{mR^2 + MA^2}$. La lettre R^2 indique ici la somme des quarrés $r^2 + r'^2 + r''^2 +$ etc. Cette expression, en désignant par Q^2 le quotient du moment d'inertie divisé par la masse du corps, deviendra $V = \frac{PD}{M(Q^2 + A^2)}$. Telle est la forme sous laquelle on met ordinairement l'expression de la vitesse de rotation autour d'un axe quelconque.

(1) Si l'on fait la droite égale à 2a, l'on a alors, $Q^2 = \frac{1}{3} a^2$. La masse M est ici supposée égale à l'unité : il en est de même dans les valeurs qui suivent.

masse de la circonférence ou de l'anneau multipliée par le quarré du rayon. Si l'on faisoit tourner l'anneau autour d'un de ses diamètres, le moment d'inertie n'aurait alors que la moitié de cette valeur. (2)

III. *Le moment d'inertie de l'aire d'un cercle* tournant autour d'un axe perpendiculaire à son plan, et qui est mené par son centre, *est égal à la moitié de la masse du cercle multipliée par le quarré de son rayon.* Mais si le mouvement se fait autour de l'un des diamètres, le moment d'inertie ne serait que la moitié de celui-là. (3)

IV. *Le moment d'inertie d'un cylindre circulaire,* relativement à son axe, *est égal à la moitié de la masse du cylindre multipliée par le quarré de son rayon.* Mais si l'on conçoit une section faite dans le cylindre parallèlement à sa base, et passant par le centre de gravité, et qu'on suppose que le cylindre tourne autour de quelqu'un des diamètres de cette section, dans ce cas *le moment d'inertie est égal à la masse du cylindre multipliée d'une part par le tiers du quarré de sa demi-longueur, et de l'autre par le quart du quarré de sa demi-largeur.* (4)

---

(2) a étant le rayon de la circonférence, $Q^2 = a^2$ dans le premier cas, et $Q^2 = \frac{1}{2} a^2$ dans le second cas.

(3) Pour l'aire du cercle, on a $Q^2 = \frac{1}{2} a^2$ ou $Q^2 = \frac{1}{4} a^2$ selon la manière dont on le fait tourner.

(4) Le rayon du cylindre étant a, et sa demi-longueur b, on a pour le premier cas, $Q^2 = \frac{1}{2} a^2$, et pour le second, $Q^2 = \frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{4} a^2$.

V. *Le moment d'inertie d'une sphère* par rapport à l'un quelconque de ses diamètres *est égal à la masse de la sphère, multipliée par les deux cinquièmes du quarré de son rayon.* (5)

VI. Enfin *le moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle* pris par rapport à son axe, *est égal au tiers de sa masse multipliée par le quarré de sa demi-largeur, plus le même tiers multiplié par le quarré de la demi-épaisseur.* Si le parallélipipède tourne autour d'un axe passant par le centre de gravité parallèlement à la largeur de la base, alors dans la valeur précédente il faut substituer la demi-longueur du solide à sa demi-largeur; et si l'axe de rotation est parallèle à l'autre dimension de la base, c'est la demi-épaisseur du solide qui doit être remplacée par la demi-longueur. (6)

5. *Applications et exemples.*

Pour faire quelques applications des valeurs qu'on vient de donner, soit d'abord un petit lévier posé horizontalement, ayant *douze* pouces de longueur, pesant *une* once, et retenu par un axe vertical qui passe par le milieu de sa longueur. Concevons qu'à une distance de *trois* pouces de son centre de gravité, et perpendiculairement à sa longueur il ait reçu une impulsion

---

(5) Pour la sphère dont le rayon est a, $Q^2 = \frac{2}{5} a^2$.

(6) En désignant par 2a et 2b les deux dimensions de la base du parallélipipède, $Q^2 = \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} b^2$, lorsque le solide tourne dans le premier sens; et $Q^2 = \frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2$, ou $Q^2 = \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} c^2$, selon que l'axe de rotation est parallèle à a ou à b. c est la demi-longueur du solide.

capable de faire parcourir à une masse d'*une* once un espace de *dix* pouces par seconde ; on demande ce qui doit résulter de cette impulsion.

D'abord le centre de gravité demeurera immobile, puisqu'il est retenu, et le mouvement progressif sera nul. Mais en second lieu le lévier prendra un mouvement de rotation autour de l'axe, et l'on trouvera la vitesse de ce mouvement comme il suit. On *multipliera* la puissance, ou plutôt la vitesse 10 qu'elle est capable d'imprimer, par la distance 3 ; ce qui donne 30 ; et l'on *divisera* ce nombre par 12, tiers de 36 qui est le quarré de la demi-longueur du lévier. Le résultat sera $2\frac{1}{2}$: ce qui signifie que le point du lévier qui est à *un* pouce de l'axe de rotation décrira dans une seconde de temps un arc de *deux pouces et demi* de longueur, et qu'il achèvera par conséquent une révolution en *deux secondes et demie* à peu près. C'est donc là le temps que le lévier mettra à tourner autour de son axe.

Si au lieu d'un lévier il s'agissait d'une sphère de *douze* pouces de diamètre, et pesant *une* livre, traversée au centre par un axe fixe, et frappée par une force semblable dirigée dans un plan perpendiculaire à cet axe, et passant aussi à *trois* pouces de distance du centre de la sphère. On trouvera encore la vitesse de rotation en *divisant* le nombre 30 qui est le même que tout à l'heure, par les *deux cinquièmes* de 36 qui est le quarré du rayon de la sphère. Le résultat de cette opération d'arithmétique est $2\frac{1}{12}$. Telle est donc la vitesse de rotation pour le point qui est à *un* pouce de l'axe. La sphère tournerait donc sur elle-même en *trois secondes et un quart*, et elle conti-

nuerait à tourner ainsi uniformément, tant qu'aucun obstacle, ou aucune puissance étrangère ne viendrait point troubler ce mouvement.

On a supposé que la sphère était retenue par un axe fixe passant par son centre: mais comme on a dit, le mouvement de rotation n'en aurait pas moins lieu, quand la sphère serait libre, et il serait encore tel qu'on vient de le trouver, dans les mêmes circonstances. Seulement il existerait alors en outre dans la sphère un mouvement de progression, qui n'apporterait aucune espèce de dérangement à celui par lequel les parties tournent autour de leur centre. Ces deux mouvemens, résultats d'une même impulsion, sont tout-à-fait indépendans l'un de l'autre, et s'exécutent séparément et dans le même temps, comme s'ils existaient seuls. Le mouvement progressif ne dépend que de la grandeur de la puissance; tandis que le mouvement de rotation dépend en outre de la quantité dont cette puissance s'écarte du centre de gravité du mobile. La *même* impulsion qui dans tous les cas engendre la *même* vitesse progressive, produit des vitesses de rotation *différentes*, selon qu'elle passe à une *plus* ou *moins* grande distance de ce centre de gravité.

Les corps célestes nous offrent un exemple frappant et remarquable de ce *double* mouvement, qui se perpétue dans la durée des siècles sans éprouver d'altération sensible. Considérons sous ce point de vue le globe de la terre, celui de tous ces corps qui nous est le mieux connu. Tandis que notre globe avance dans l'espace, et tourne autour du soleil par son mouvement *annuel*, il roule en même temps sur lui-même, et tourne sur son centre par le mouvement qu'on appelle

diurne. Ces deux mouvemens étant supposés le résultat d'une impulsion unique, il est évident que la force qui les a produits, a dû passer à quelque distance du centre du globe; et comme les vitesses nous sont ici parfaitement connues, il ne paraît pas impossible de trouver cette distance; et de connaître par conséquent la véritable direction de la puissance, qui, dans l'origine des choses, a imprimé à notre globe les deux mouvemens dont il est animé.

On se rappelle que la vitesse de rotation est égale *au moment de la puissance divisé par le moment d'inertie du mobile.* Or dans le moment de la puissance entrent la masse du mobile, la vitesse qu'il peut prendre, et la distance que nous cherchons. D'un autre côté le moment d'inertie d'une sphère se compose de la masse de la sphère et des *deux cinquièmes* du quarré de son rayon. Dans le cas que nous considérons ici, nous connaissons la vitesse de rotation par le mouvement diurne, la vitesse de progression par le mouvement annuel, et le rayon du globe terrestre par les travaux des astronomes modernes. Quant à la masse du mobile, comme elle entre de la même manière dans le dividende et dans le diviseur, nous pouvons n'y avoir aucun égard, et nous n'avons nul besoin de la connaître. La seule chose inconnue ici est donc la distance de la direction de la puissance au centre de notre globe; et nous parviendrons aisément à la connaître de la manière suivante. (1)

---

(1) La formule $V = \frac{PD}{MQ^2}$ devient en mettant pour P sa valeur MU, $V = \frac{MUD}{MQ^2} = \frac{UD}{Q^2}$; et comme on a trouvé pour

Prenons le rayon du globe pour l'unité, la distance de la terre au soleil étant supposée de 24000 de ces unités, on aura $394 \frac{1}{2}$ pour la vitesse progressive de la terre dans un jour. D'ailleurs sa vitesse de rotation est de $6 \frac{3}{10}$ dans le même temps. Divisant celle-ci par l'autre, et prenant les *deux cinquièmes* du quotient, on trouve pour résultat la fraction 0,0064, ou $\frac{1}{150}$ à peu près. Ainsi l'impulsion primitivement imprimée au globe terrestre, et qui lui a fait prendre les deux mouvemens que nous lui connaissons, a été dirigée suivant une droite, qui passait loin du centre d'une quantité égale à la 150.me partie du rayon. Plus près du centre, la vitesse de rotation eût été plus lente : elle aurait été plus rapide à une plus grande distance. Ainsi les jours auraient été ou plus longs ou plus courts, sans que cela eût influé sur la durée de l'année, qui eût toujours été la même, tant que la grandeur de la puissance serait demeurée la même.

---

le cas de la sphère, $Q^2 = \frac{2}{5} a^2$, $V = \frac{UD}{\frac{2}{5} a^2}$, d'où l'on tire $D = \frac{2}{5} \frac{a^2 V}{U}$. a est le rayon de la sphère; en le faisant égal à l'unité, il vient, $D = \frac{2}{5} \frac{V}{U}$.

CHAPITRE XV.

DU CENTRE SPONTANÉ DE ROTATION, ET DES CENTRES D'OSCILLATION ET DE PERCUSSION.

1. *Du Centre spontané de rotation.*

LORSQU'UN corps a reçu une impulsion qui ne passe pas par son centre de gravité, les différentes parties de ce corps prennent un mouvement de rotation autour de ce centre de gravité comme s'il était fixe. Soit donc un corps M (fig. 40) dont le centre de gravité est en G, et concevons qu'il est frappé en B dans la direction AB. Menons du point G sur AB la perpendiculaire GP, et supposons que le point P avance en un instant de la quantité PQ égale à GH, due au mouvement de progression, *plus* de la quantité QR, qui est due au mouvement de rotation. Cette dernière quantité devrait être un arc de courbe ; mais à raison de sa petitesse, nous pouvons la considérer comme une droite. Si l'on mène donc par R et par H la droite RH, cette ligne indiquera la position qu'aura prise la perpendiculaire GP au bout de ce premier instant par l'effet du double mouvement. Or cette droite va rencontrer GP prolongée en un certain point C, qui étant considéré comme appartenant au corps M, n'aura pas changé de place,

pendant que le centre de gravité se sera transporté de G en H. En effet ce point aurait dû avancer de la quantité CD, à cause du mouvement progressif de tout le corps, et il aurait dû en même temps rétrograder d'une égale quantité par l'effet du mouvement de rotation. Il est donc resté immobile. Ce point s'appelle le *centre spontané de rotation*. Il est toujours éloigné du centre de gravité du corps de la quantité nécessaire pour que *sa vitesse absolue de rotation soit égale et opposée à la vitesse de progression*.

On trouve la position du centre spontané de rotation au moyen de la proportion suivante. La vitesse de rotation du point P *est à* sa vitesse de progression, *comme* la distance de l'impulsion au centre de gravité *est à* la distance du même centre de gravité au point cherché ; c'est-à-dire donc que cette dernière distance est égale *à la distance de l'impulsion multipliée par la vitesse progressive, et divisée par la vitesse de rotation du point où la puissance rencontre la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur sa direction*. Cette vitesse de rotation est facile à connaître par ce qui a été dit ci-dessus; et s'il s'agit d'une sphère, la distance CG est égale *aux deux cinquièmes du quarré du rayon divisés par la perpendiculaire* GP. Le centre spontané de rotation du globe terrestre est placé à une distance de 60 rayons, dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. (1)

---

(1) Les triangles semblables CRP, CHG donnent la proportion, PR : GH :: CP : CG; ou en prenant les différences, PR — GH : GH :: CP — CG : CG; ou RQ : GH :: PG : CG; donc $CG = \frac{PG \times GH}{RQ} = \frac{DU}{VD} = \frac{U}{V} = \frac{U \times Q^2}{U \times D} = \frac{Q^2}{D}$.

2. *Des oscillations d'une masse pesante.*

Considérons maintenant un corps pesant suspendu à un axe fixe horizontal, et tiré hors de la ligne de son repos : voyons quel doit être son mouvement. Ici l'impulsion dont il était question précédemment se trouve remplacée par l'action de la pesanteur, qui s'exerce également et suivant des lignes parallèles sur chacune des molécules dont le corps est composé. Toutes ces forces partielles ont une résultante qui passe par le centre de gravité du corps ; et cette puissance n'est plus une force *instantanée*, mais bien une force *continue*, et qui varie même, comme on sait, lorsque le corps passe d'une position à une autre.

Soit donc le corps M (fig. 41) dont le centre de gravité est en G, et qui est retenu en C par un axe fixe perpendiculaire au plan de la figure, au moyen d'une verge CG *inflexible et sans pesanteur.* Supposons que ce corps soit éloigné de la verticale CD d'une certaine quantité GK. Dans cette position il sera sollicité par la pesanteur qui se fait sentir dans le sens GP, et qui a pour expression la masse M multipliée par la valeur de la gravité, ou plutôt par le poids du corps. Mais cette force ne peut pas avoir son entier effet, parce que le corps retenu dans le sens CG n'a pas la liberté de se mouvoir selon GP. On peut ici, comme on l'a fait souvent plus haut, décomposer la force en deux, l'une suivant CG qui sera détruite par la résistance de l'axe fixe, et l'autre suivant la perpendiculaire à CG, et qui obtiendra par conséquent tout son effet. Le cas serait donc le même que si le corps M

était simplement sollicité dans cette dernière direction par une force égale à celle qu'aurait donnée cette décomposition de la pesanteur. Mais il n'est pas besoin d'avoir recours à ce moyen ; et l'on peut faire immédiatement au cas présent l'application des principes que l'on a établis ci-dessus.

L'on a donc à considérer ici un corps soumis à une force connue, dont la direction passe à une certaine distance EC, ou GK de l'axe fixe. Donc la vitesse de rotation à l'unité de distance sera *égale à la puissance multipliée par GK, et divisée par le moment d'inertie du mobile, ce moment pris par rapport à l'axe fixe.* On se rappelle que ce moment se compose de celui pris par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité du corps, *plus* du produit de la masse de ce corps multipliée par le quarré de l'intervalle qui sépare les deux axes. On imaginera donc un axe mené par le centre de gravité G parallèlement à l'axe fixe, et l'on prendra le moment d'inertie du corps relativement à cet axe fictif. L'on y ajoutera ensuite le produit de la masse du corps par le quarré de CG distance des deux axes ; et l'on se servira de cette somme pour diviser la puissance multipliée par GK. Le résultat de cette opération exprimera la vitesse de rotation au premier instant.

La grandeur de cette vitesse dépend évidemment de la quantité GK, qui sert à multiplier la puissance. Mais cette quantité elle-même est dépendante de la position du corps au moment donné, ou de l'angle GCK, dont il est alors distant de la verticale CD. A mesure que le corps descend pour obéir à la force qui l'entraîne, cet angle diminue, la distance CK s'accourcit de plus en plus, de sorte que la puissance décroît sans cesse,

Mais comme ses actions successives s'ajoutent toujours aux actions antérieures, il suit que la vitesse de rotation va néanmoins en croissant, jusqu'à ce que le centre de gravité G soit arrivé dans la verticale CD ; après quoi cette vitesse va en diminuant suivant une loi semblable, à mesure que le corps remonte du côté opposé.

Pour déterminer la loi de ces accroissemens et de ces diminutions, et en général pour avoir la vitesse de rotation en un point quelconque de l'arc que le corps parcourt, il faut encore ici recourir au calcul, et l'on trouve par ce moyen l'expression que nous plaçons dans la note. (1)

3. *Du centre d'oscillation.*

Lorsqu'une masse M d'un certain volume fait ainsi des oscillations autour d'un axe horizontal, les différentes parties du corps se meuvent ensemble, et oscillent dans le même temps. Leurs vitesses *absolues* sont bien différentes entre elles; mais comme ces vitesses sont toujours en raison des distances à l'axe, il suit que les molécules du corps, s'approchent, ou s'éloignent

---

(1) Soit g la gravité, M la masse pesante, A la distance CG, f l'angle GCK : on a, $V = \frac{Mg \times A \sin f}{M(Q^2 + A^2)} = \frac{Ag \sin f}{Q^2 + A^2}$. Voilà pour le premier instant ; mais pour un instant quelconque, on trouve l'expression : $V^2 = \frac{2Ag}{Q^2 + A^2}(\cos b - \cos f)$. f est l'angle initial, et b est l'angle qui convient au moment donné. Cette expression se rapporte à celle que l'on a vu plus haut page 187.

toutes de la verticale CD de la même quantité *angulaire* dans le même temps, et qu'elles font ainsi des oscillations *communes* et d'une égale durée.

Cependant si ces molécules avaient été libres, et indépendantes les unes des autres, il est certain par les principes établis ci-devant (Chap. IX) que celles qui se seraient trouvées plus proche de l'axe, auraient fait des oscillations plus promptes; et que celles qui en sont plus éloignées, auraient marché plus lentement. La dépendance mutuelle de tous ces petits corps est donc cause que le mouvement des uns est *accéléré*; et que celui des autres est *ralenti* de manière à ce qu'ils oscillent ensemble et dans le même temps autour du point fixe. Cependant on conçoit qu'il doit y avoir dans l'intérieur du corps, et sur la direction CG, un point O sur lequel les influences contraires des molécules plus ou moins éloignées se compensent mutuellement, et qui se meut par conséquent, comme s'il était seul et tout-à-fait indépendant. Cherchons quelle est la position de ce point, c'est-à-dire quelle est sa distance à l'axe.

Puisque le point dont il est ici question, se meut librement, et sans être influencé par les autres points matériels auxquels il est uni, sa vitesse de rotation, quand il serait seul, ne diffèrerait pas de celle qui a lieu pour la masse M dont il fait partie. D'un autre côté on a fait connaître vers la fin du Chapitre neuvième, quelle était la vitesse avec laquelle s'approchait ou s'éloignait de la verticale CD, un point pesant dont la distance à l'axe était connue. Ces deux vitesses étant ici une seule et même chose, si l'on en compare les expressions, il sera facile par les règles connues, d'en tirer la valeur de la distance cherchée. On trouvera donc que le point

demandé est toujours placé au-delà du centre de gravité du corps par rapport à l'axe fixe, et d'une quantité qui varie suivant la forme du corps que l'on considère. (1)

Si le corps donné est une sphère solide d'un rayon connu, et suspendue à une verge sans pesanteur, le point qui fait ses oscillations librement, et sans éprouver aucune gêne, est distant du centre de la sphère d'une quantité égale *aux deux cinquièmes du quarré du rayon divisés par CG.* Si la sphère était suspendue par un point de sa surface, ou que l'axe fut tangent à cette surface, le point cherché serait placé au-dessous de l'axe *aux sept cinquièmes* du rayon.

S'il s'agit d'un parallélipipède rectangle dont le centre de gravité est placé au milieu de sa longueur, et dont les deux autres dimensions sont supposées égales entre elles; on trouve que la distance du point en question, est plus grande que la distance du centre de gravité, d'une quantité égale *aux quarrés de la demi-longueur et de*

---

(1) La vitesse de rotation du pendule simple a été trouvée au chapitre cité : $V = \sqrt{\frac{2g(\cos b - \cos f)}{L}}$. Ici nous avons trouvé $V^2 = \frac{2Ag}{Q^2 + A^2}(\cos b - \cos f)$. Élevant la première expression au quarré et l'égalant à la dernière, il vient : $L = \frac{Q^2 + A^2}{A}$. Pour la sphère dont le rayon est a, $Q^2 = \frac{2}{5}a^2$. Donc pour la sphère $L = A + \frac{2}{5}\frac{a^2}{A}$. Dans le parallélipipède $Q^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}h^2$; donc dans ce solide $L = A + \frac{\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}h^2}{A}$. a est la demi-épaisseur, et h la demi-longueur.

la demi-largeur du solide divisés par le triple de CG. Dans le cas où l'axe de rotation serait tangent à l'extrémité supérieure du parallèlipède, CG serait égal à la demi-longueur du solide, et alors dans la valeur qu'on vient de donner, on diviserait par le triple de la demi-longueur.

Le point d'un corps qui oscille ainsi librement et d'une manière indépendante, s'appelle le *centre d'oscillation* de ce corps. La distance qui sépare ce point de l'axe fixe, exprime la longueur du *pendule simple* qui ferait ses oscillations dans le même temps que le corps donné. Quant à ce corps lui-même considéré comme *oscillant* autour de l'axe fixe qui le retient, on l'appelle un *pendule composé*. La forme d'un pendule composé peut varier d'une infinité de manières différentes ; et la détermination de son centre d'oscillation est souvent accompagnée de beaucoup de difficultés. C'est alors par l'expérience et le tâtonnement qu'on peut trouver la longueur du pendule simple, qui fait ses oscillations dans le même temps que ce pendule composé. On prend une petite balle de platine ou de plomb suspendue à un fil très-délié qu'on allonge ou qu'on accourcit, jusqu'à ce que les oscillations de ce pendule simple, soient exactement de la même durée que celles du pendule composé qu'on lui compare.

4. *Du centre de percussion.*

Lorsqu'un corps quelconque fait ainsi des oscillations autour d'un axe horizontal, ce n'est plus dans son centre de gravité que toute sa masse est censée résider,

mais bien dans son centre d'oscillation ; puisque ce point étant le seul qui ait sa vitesse naturelle , et tous les autres étant forcés de conformer leur vitesse à celle-là , le mouvement se fait réellement comme si toute la masse était réunie en ce point. Il suit de là que le centre d'oscillation est aussi le point par lequel un corps animé d'un mouvement de rotation , produira le plus d'effet , ou une impression plus forte ; et à cet égard ce point prend le nom de *centre de percussion.* Au reste on peut trouver directement dans un corps qui tourne autour d'un axe quelconque , la position du centre de percussion.

Lorsqu'un corps se meut autour d'un axe, toutes ses parties tournent bien dans le même temps ; mais leurs vitesses propres sont d'autant plus grandes, qu'elles se trouvent placées plus loin de cet axe. Ainsi pour avoir la force qui anime chaque molécule, il faut multiplier sa masse par sa distance à l'axe de rotation ; et pour trouver le *moment* de cette force relativement à cet axe, on multipliera encore une fois par la même distance à l'axe ; de sorte que l'effort qui se fait pour tourner autour de l'axe de rotation , est égal *à la somme de toutes les molécules multipliées chacune par le quarré de sa distance à l'axe fixe.* Cela posé , cherchons quelle est ici la distance, où toutes les molécules étant réunies , leur effort pour tourner autour de l'axe serait *égal* à la somme des efforts qu'elles font à la place qu'elles occupent ; ou ce qui est la même chose , cherchons le point où il faudrait appliquer une force égale à celle qui anime le corps , pour le réduire au repos.

Si le corps était libre, la puissance qui l'anime aurait pour expression la masse de ce corps multipliée par la

vitesse de son centre de gravité ; et c'est à ce même centre de gravité qu'il faudrait appliquer une force égale et opposée pour arrêter et detruire son mouvement. Mais si le corps est assujéti à se mouvoir autour d'un axe fixe auquel il est lié, et duquel son centre de gravité est distant d'une certaine quantité, la force de ce corps sera bien encore égale à sa masse multipliée par la vitesse de son centre de gravité; mais ce ne sera plus à ce dernier point qu'il faudra appliquer la force contraire : car le mouvement ici doit s'estimer par rapport à l'axe de rotation. Il faudra donc chercher la distance où le *moment* de la force du corps pris relativement à cet axe, est égal à la *somme des momens* des particules dont il est composé, c'est-à-dire, au moment d'inertie du corps relatif à l'axe fixe. On trouve ainsi que cette distance est exprimée de la même manière que celle qui appartient au centre d'oscillation. Les centres d'oscillation et de percussion ne sont donc qu'une seule et même chose ; et pour anéantir le mouvement d'un corps qui tourne autour d'un axe, c'est à son centre d'oscillation qu'il faut appliquer la force contraire. Lorsque tenant un bâton à la main, on le fait mouvoir en tournant pour frapper quelque objet, l'effet du choc est le plus grand, lorsqu'il se fait par le point qu'on vient d'enseigner à trouver, et qui s'appelle pour cela le *centre de percussion ;* tel est le point P (fig. 42). (1)

Lorsqu'un corps se meut librement en tournant autour

---

(1) L'effort de rotation est exprimé par $md^2 + m'd'^2 + m''d''^2 +$ etc.; ou comme les molécules sont supposées toutes

de son centre de gravité, il y a au dedans ou au dehors de ce corps, un certain point qu'ou a appelé le *centre spontané de rotation*, et qu'on a enseigné à trouver. Il est facile d'après cela de reconnaître que ce point est placé par rapport à la puissance qui a produit le mouvement, tout comme le centre d'oscillation par rapport à l'axe fixe. Ces deux points peuvent donc se trouver l'un et l'autre de la même manière. (2)

égales, par m ($d^2 + d'^2 + d''^2 +$ etc.). A étant la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, et D celle du point cherché au même axe, on aura : $M \times A \times D = m(d^2 + d'^2 +$ etc.$) = M(A^2 + Q^2)$. D'où l'on tire $D = \frac{A^2 + Q^2}{A}$, comme on l'a trouvé pour le centre d'oscillation.

(2) La distance du centre spontané de rotation au centre de gravité a été trouvée égale à $\frac{Q^2}{D}$, D étant la distance du centre de gravité à la direction de la puissance. En ajoutant ensemble ces deux distances, on a, $D + \frac{Q^2}{D}$, qui est la même chose que l'expression précédente, lorsqu'on fait D égal à A.

CHAPITRE XVI.

DES AXES PRINCIPAUX.

LORSQU'UN corps libre et en repos, est frappé suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité; d'abord il se meut en avant, comme si ce centre de gravité avait été frappé immédiatement, et sa vitesse progressive est *égale à la puissance divisée par la masse du corps.* En second lieu le mobile prend autour de son centre de gravité, un mouvement de rotation, dont la vitesse est *égale au moment de la puissance divisé par le moment d'inertie du corps.* Mais cette dernière vitesse qui a lieu au premier instant, sera-t-elle encore la même dans les instans suivans? et l'axe de rotation autour duquel se fait d'abord le mouvement, demeurera-t-il le même pendant toute la durée de ce mouvement? Il est facile de concevoir que cela ne pourra arriver ainsi qu'autant que cet axe sera tel, que toutes les parties du corps se trouveront également distribuées à l'entour, et pourront ainsi dans tous les instans se faire mutuellement équilibre.

Il y a en général dans tous les corps trois axes perpendiculaires entre eux, qui jouissent de cette propriété, et par rapport auxquels le mouvement de rotation se maintient tel qu'il a commencé. Ces axes

ont cela de particulier, que le moment d'inertie pris à l'égard d'eux, est *le plus grand, ou le plus petit possible* : ce qui peut servir à les faire reconnaître. Ces axes s'appellent *les axes principaux.* Il n'est pas de notre plan de donner ici les formules très-compliquées qui servent à les trouver dans tous les cas : nous nous contenterons de faire sur ce sujet un petit nombre d'observations.

Dans une sphère homogène tout diamètre est un axe principal. Ainsi dans un corps de cette forme, l'axe de rotation aussi bien que la vitesse demeurent constamment les mêmes, abstraction faite de tout obstacle. Il est évident que le moment d'inertie dans une sphère est le même pour tout axe qui passe par son centre de figure.

Dans un ellipsoïde le grand axe est un des axes principaux ; les deux autres sont placés dans la section faite perpendiculairement à celui-là, et passant par le centre de gravité du solide.

Dans le cylindre droit circulaire on a de même pour axes principaux, d'abord l'axe du cylindre, ensuite deux diamètres quelconques de la section parallèle à la base, qui passe par le centre de gravité du solide.

C'est par rapport aux axes principaux qu'on a donné ci-dessus la valeur du *moment d'inertie* de quelques corps. Cette quantité rapportée à un axe quelconque est trop compliquée, et n'était pas de notre objet. Voyez la Note (*e*) pour le choc indirect, et la Note (*f*) pour le mouvement de vibration.

FIN DE LA PREMIÈRE SECTION.

SECTION DEUXIÈME.

STATIQUE.

On a considéré toutes les circonstances du mouvement des corps. On a vu ce qui résultait de l'action d'une ou de plusieurs forces dans tous les cas. Il s'agit de déterminer à présent ce qui est nécessaire pour détruire l'action de ces forces, et les tenir en *équilibre*. On considèrera d'abord l'équilibre en lui-même, comme résultant de l'*égalité* et de l'*opposition* des forces : on traitera ensuite de l'équilibre qui s'établit au moyen des *machines*.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ÉQUILIBRE CONSIDÉRÉ EN LUI-MÊME.

Lorsqu'un corps n'est soumis qu'à une seule force, il est évident qu'il peut être maintenu en repos par une force *égale* et *opposée*. Si donc un mobile reçoit ou a reçu une impulsion dans un certain sens, on le maintiendra en repos, ou on le ramènera à cet état,

par le moyen d'une impulsion *égale* donnée en sens *contraire*; et ce repos s'appellera proprement *équilibre.* Un obstacle insurmontable détruirait bien aussi l'effet de la première impulsion : mais le repos qui en résulterait, ne serait pas tout-à-fait la même chose que celui à qui nous donnons le nom d'équilibre.

Si le corps est soumis à l'action d'une force *continue*, l'équilibre ne pourra subsister, qu'autant que la force opposée sera elle-même une force égale et continue. Ainsi les corps terrestres étant toujours sollicités par la pesanteur, il faut pour détruire à chaque instant l'action non interrompue de cette force, ou la résistance d'*un point fixe* auquel le corps est suspendu, ou celle d'*un plan horizontal* sur lequel repose le corps, ou enfin la résistance d'une masse *également pesante* agissant en sens contraire.

Si l'on voulait soutenir un corps pesant, en lui opposant la force d'un homme, l'équilibre ne pourrait avoir lieu que pendant un temps limité : car la force de l'homme s'épuise en s'exerçant, tandis que celle de la pesanteur demeure toujours la même. Sans doute que cette puissance, comme on a vu, ne communique à chaque instant qu'un degré de vitesse infiniment petit : mais ce degré de vitesse doit être multiplié par la masse du corps à soutenir ; et il en résulte ainsi un produit fini, qu'on appelle *le poids* du corps, et qui mesure l'effort nécessaire pour le tenir en équilibre. L'homme qui doit soutenir le corps, est donc obligé de produire à chaque instant une force *égale et contraire.* Les moyens physiques qu'il peut avoir pour cela, varient d'un individu à l'autre : mais toujours sont-ils bornés, et au bout d'un certain temps, même assez

court, il devient incapable de l'effort nécessaire, et il est contraint d'abandonner le corps à la pesanteur.

Un effort momentané ne peut produire ici qu'un équilibre d'un moment. Si cet effort devient une impulsion contraire à la direction de la pesanteur, il pourra l'emporter pendant quelque temps sur cette force : mais bientôt celle-ci aura détruit tout l'effet de l'impulsion, et elle l'emportera à son tour, et pour jamais. Il ne peut donc pas y avoir d'équilibre entre une *force continue* et une *impulsion* quelconque, entre une *pression* et une *percussion*. C'est avec des forces de même nature que l'on peut établir l'équilibre, et le maintenir.

1. *Equilibre d'un corps sollicité par des forces non-parallèles.*

Si le corps qu'il s'agit de tenir en équilibre, est sollicité par deux forces qui sont dans le même plan, et qui font un angle entre elles, il ne faut pas croire qu'il soit nécessaire de recourir à deux forces *égales et opposées* à celles-là : une seule force suffira pour cet objet. On se rappelle que deux forces telles qu'on vient de les supposer, peuvent être remplacées par une force unique qu'on appelle leur *résultante*, et qui est représentée en grandeur et en direction par la diagonale d'un parallélogramme construit sur les deux forces données. On obtiendra donc encore l'équilibre demandé avec *une seule* force égale à cette diagonale, et agissant en sens contraire. Par conséquent toutes les fois que autant de forces qu'on voudra, pourront avoir une résultante unique, l'équilibre pourra tou-

jours être établi au moyen d'*une seule force égale et opposée à cette résultante*. Il en faudrait *deux* pour cela, si le système avait de nécessité *deux résultantes*.

Au reste il est facile de voir que l'on peut aussi obtenir l'équilibre par le moyen de plusieurs forces combinées convenablement, pour que leur résultante soit égale et opposée à celle des forces qui agissent sur le mobile. En général lorsqu'un corps est soumis à différentes forces, et que l'équilibre a lieu, *une seule* de ces forces peut être considérée comme établissant cet équilibre, et par conséquent comme étant égale et opposée à la résultante de toutes les autres : ou bien on peut diviser ces forces en deux groupes, dont les résultantes sont égales et opposées. Ces deux manières de voir sont également bonnes : mais la première est plus simple.

2. *Equilibre dans le cas des forces parallèles.*

Lorsque des forces *parallèles* agissent sur un mobile en même temps et dans le même sens, ces forces ont encore une *résultante unique* dont on sait trouver la position, qui est égale à leur somme et qui est aussi dirigée dans le même sens. L'équilibre pourra donc s'établir ici par une seule force appliquée au point convenable. Si parmi ces forces parallèles les unes agissent dans un sens, et les autres dans le sens contraire, la résultante étant alors égale à l'excès des unes sur les autres, et agissant dans le sens de celles-là, il est facile d'avoir la grandeur et la direction de la force nécessaire pour l'équilibre, ainsi que le point où elle doit être appliquée.

La seule circonstance où une force unique ne suffit pas pour établir l'équilibre dans le cas des forces parallèles, est celle où ces forces se réduisent à deux qui sont égales en grandeur, opposées en direction, et appliquées à des points différens. On trouve alors que la force nécessaire pour l'équilibre *est nulle et doit être appliquée à une distance infinie*. Or ces conditions ne pouvant pas être remplies, il suit que l'équilibre dans ce cas ne peut pas avoir lieu par le moyen d'une seule force; et le corps tourne nécessairement sur lui-même, jusqu'à ce que les deux forces qui le sollicitent, se trouvent dans une parfaite opposition. Mais l'équilibre pourrait s'établir auparavant en employant deux forces, qui détruiraient séparément ces deux-là.

CHAPITRE II.

DES MOMENS.

IL n'est par toujours nécessaire pour que l'équilibre ait lieu, que les deux forces qui doivent se contre-balancer, soient *égales et opposées* : il suffit pour obtenir cet équilibre, que *les effets qu'elles tendent à prodnire soient opposés*, et *que leurs efforts soient égaux*. Mais dans ce cas l'équilibre ne s'établit qu'au moyen de quelque point fixe, autour duquel les deux

forces tendent à produire du mouvement, et par rapport auquel par conséquent la grandeur de ces forces doit être mesurée.

Le produit d'une force par la perpendiculaire abaissée du point fixe sur sa direction, s'appelle le *moment* de la force : c'est ce qui mesure sa grandeur relativement à l'effet qu'elle tend à produire. C'est là une expression dont nous nous sommes déjà servis plusieurs fois, et dont il est facile de retenir la signification. Dans la figure 43, D étant le point fixe, si l'on veut avoir le moment de la force P, il faut de ce point D abaisser sur la direction de cette force la perpendiculaire DG, et multiplier la grandeur absolue de la force P par DG : ce *produit* sera la grandeur relative de la même force, ou son *moment* par rapport au point D.

On peut concevoir DG comme une verge inflexible, unie fixement au point D, autour duquel elle peut se mouvoir, et considérer la puissance P comme appliquée perpendiculairement au point G de cette verge. Si l'on suppose ensuite que l'action de cette puissance soit capable de faire mouvoir la droite DG autour du point D pendant un temps fort court, il est visible que le point G pendant ce temps décrira un arc de cercle dont la grandeur dépendra de la grandeur de la puissance P, et de la quantité dont le point G est éloigné du centre D ; de façon que le produit de la puissance par la perpendiculaire DG fera connaître la vitesse ou *effective* ou *virtuelle* du point G, et par conséquent l'effort de la puissance pour produire un mouvement de rotation autour du point fixe. Il suit de ces considérations que *les momens* sont très-propres à donner

la mesure *rélative* des forces dont on veut comparer les effets.

Soient donc deux forces inégales, appliquées en deux points différens du corps M (fig. 44) qui peut se mouvoir autour d'un point fixe C : il y aura équilibre entre ces deux forces, si travaillant toutes deux à faire tourner le corps en des sens contraires, *les momens de ces forces par rapport au point fixe sont égaux.* Il est évident que dans ce cas le corps ne peut se mouvoir d'aucun côté, et qu'il doit demeurer en repos. Ce serait la même chose s'il était sollicité par un nombre de forces quelconque, pourvu que la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, fût égale à la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner dans le sens contraire.

Au reste ce cas d'équilibre peut se ramener au précédent. Car si les deux forces concourent en un certain point, elles auront une résultante qui passera par ce point, mais qui sera en même temps assujétie à passer par le point fixe ; ce qui la réduira à zéro, et nous ramènera le cas de deux forces égales et opposées. Le point fixe est supposé capable d'une résistance *indéfinie.* Il en est encore de même lorsque les forces sont parallèles : car celles-ci ont toujours une résultante qui dans le cas d'équilibre, passe également par le point fixe.

1. *Moment de la résultante.*

Si sur le plan des deux forces P et Q (fig. 45) on prend un point D ou D', qu'on suppose lié d'une manière invariable avec le point A où les deux forces concou-

rent, et que de ce point D ou D′ on abaisse des perpendiculaires sur les directions des forces, et sur celle de leur résultante R, on aura toujours *le moment de la résultante égal à la somme ou à la différence des momens des composantes*, selon que le point fixe sera situé hors de l'angle des deux forces, ou dans l'intérieur de cet angle.

En effet la résultante représentant les deux forces, et pouvant en tenir lieu, on voit que si les forces travaillent de concert comme dans le cas du point D, pour faire tourner la droite AD dans le même sens autour de ce point D, ce qui arrive toujours quand elles sont situées du même côté par rapport à ce point, la résultante à elle seule devra produire le même effet, et faire prendre la même vitesse : ce qui exige que R multiplié par DG *soit égal* à la somme de P multiplié par DF, *plus* Q multiplié par DE. Mais si les forces tendent à faire tourner en sens contraires, comme il arrive pour le cas où elles sont situées de part et d'autre du point fixe D′, alors la vitesse réelle ne devant plus être que la différence des vitesses que chacune de ces forces peut produire séparément, la résultante ne pourra être capable que du même effet; et R multiplié par D′G′ *sera égal* à la différence entre P multiplié par D′F′ et Q multiplié par D′E′. Dans le cas particulier où cette différence serait nulle, la résultante passerait par le point D′, et l'équilibre aurait lieu moyennant la résistance de ce point.

L'équilibre étant établi comme on l'a supposé dans ce dernier cas, si l'on conçoit que le système pour un instant fort court est mis en mouvement autour du point D′, les points E′ et F′ en tournant décriront dans

cet instant de petits arcs de cercle dont D'E' et D'F' seront les rayons. Les grandeurs de ces arcs suivant le même rapport que leurs rayons, et exprimant d'ailleurs les vitesses des points E' et F' dans le même temps, on pourra dire que l'*équilibre a lieu entre deux forces lorsqu'il y a égalité et opposition dans les produits de ces forces multipliées chacune par la vitesse qu'elle tend à communiquer au système.*

Ce dernier principe trouve fréquemment son application dans la mécanique, et s'appelle le principe des *vitesses virtuelles.* Il revient à ce qu'on a vu en traitant du choc des corps. Pour que les corps qui se choquent, se réduisent mutuellement au repos, il n'est pas nécessaire que les masses soient égales de part et d'autre, de même que les vitesses ; il suffit qu'il y ait égalité entre les deux *produits* de chaque masse par la vitesse qui lui est propre.

Lorsque les directions des deux forces sont parallèles, on trouve encore que *le moment de la résultante est égal à la somme ou à la différence des momens des composantes* selon la position du point fixe. Mais alors les perpendiculaires abaissées de ce point sur les directions des forces et sur celle de leur résultante, se trouvent placées sur une même droite. Les forces étant supposées du même côté par rapport au point fixe, et agissant dans le même sens, le moment de la résultante sera égal à la somme de leurs momens. Il égalerait la différence de ces momens, si les forces étaient disposées de part et d'autre du point fixe, et que leur action s'exerçât toujours dans le même sens. Les résultats seraient tout-à-fait opposés à ceux-là, si les forces agissaient en des sens opposés.

L'équilibre aurait encore lieu dans le cas des forces parallèles, lorsque l'effort pour faire tourner le système dans un sens autour du point fixe, est égal à l'effort qui se fait pour faire tourner en sens contraire; et alors la résultante passe par le point fixe.

Telle est la théorie des *momens*: et voilà tout ce qui concerne l'équilibre considéré en lui-même. Voyons maintenant comment on l'établit au moyen des *machines*.

CHAPITRE III.

DES MACHINES EN GÉNÉRAL.

On donne le nom de *machine* à tout instrument ou appareil destiné à transmettre l'action des forces les unes sur les autres, et par le moyen duquel des forces en général *inégales et non opposées* peuvent être mises en équilibre entre elles. Ce qu'on a dit dans le Chapitre précédent nous a expliqué parfaitement, comment l'équilibre pouvait avoir lieu dans ce cas. Si les deux forces ne sont ni égales, ni opposées l'une à l'autre, *leurs momens sont néanmoins égaux, et elles tendent à produire des effets contraires*. Ce n'est qu'au moyen de cette égalité d'une part, et de l'opposition qui a lieu de l'autre, que l'équilibre peut s'établir. Ces deux choses suffisent donc pour cela : il y a équilibre toutes les fois qu'elles se rencontrent; et il ne saurait exister d'équilibre là, où elles ne se trouvent pas.

1. *Principe d'équilibre dans les machines.*

Il y a dans toutes les machines un *point* ou un *axe fixe* autour duquel le mouvement s'établit, lorsque l'équilibre est rompu; et c'est à partir de ce point, ou de cet axe que l'on doit compter les *momens.*

Des deux forces que l'on met en opposition à l'aide d'une machine, l'une s'appelle la *puissance*, parce qu'elle est considérée comme destinée à produire un certain effet; l'autre s'appelle la *résistance*, par la raison qu'elle est en général considérée comme devant être vaincue par la première. En vertu du principe des vitesses virtuelles, il y a équilibre, lorsque *la puissance multipliée par la vitesse qu'elle peut prendre, est égale à la resistance multipliée par la vitesse qu'elle prendrait, si l'équilibre était rompu pour un instant.* (1)

Quelles que soient la forme et la perfection d'une machine, l'équilibre ne peut s'y établir qu'autant que cette condition est satisfaite. Mais aussi lorsqu'il est une fois établi, il persévère indéfiniment, tant que les forces qui se balancent, n'éprouvent aucune altération. Dans cet état des choses, il est visible qu'un léger surcroît ajouté à la puissance, doit suffire pour la mettre en état de vaincre la résistance; et celle-ci ou vaincue ou contre-balancée est *l'effet obtenu.*

---

(1) En appelant la puissance P, et la résistance Q, et désignant par V et V′ les vitesses qu'elles peuvent prendre l'une et l'autre, on a donc pour l'équilibre $PV = QV'$.

2. *Utilité et usage des machines.*

Si la condition d'équilibre est telle qu'on vient de dire, s'il est nécessaire qu'il y ait égalité entre la force employée et l'effet obtenu ; quel est donc, dira-t-on, l'avantage que nous procurent les machines? Elles nous en procurent de très-grands ; et il y a une foule de choses qui nous deviendraient impossibles sans leur secours.

D'abord elles nous permettent d'employer plus commodément et plus utilement les forces qui sont à notre disposition. Qu'il soit question par exemple, d'élever à quelque hauteur un fardeau très-lourd. Il est évident que la chose souvent ne se pourrait pas faire, s'il fallait appliquer immédiatement les bras des hommes à la masse qu'on veut élever : ces hommes se gêneraient mutuellement, et dans leurs efforts ils se nuiraient les uns aux autres. Mais au moyen de quelque machine ils vont agir sans se troubler, et faire usage de leurs forces naturelles d'une manière commode et avantageuse. C'est ce qui se voit clairement dans la *machine à battre les pilotis.* Il faut dans cette machine pour obtenir l'effet désiré, élever à chaque instant une masse très-lourde à une certaine hauteur, pour la laisser tomber à chaque fois. On fait agir pour cela un certain nombre d'hommes, qui au moyen d'un pareil nombre de cordons passant sur autant de poulies, la soulèvent tous ensemble, et la portent ainsi à la hauteur requise sans aucune gêne ni embarras.

Ce n'est pas tout : les machines sont encore extrêmement utiles sous un autre point de vue. La grandeur

de la résistance Q qu'il s'agit de vaincre, étant supposée constante, et la vitesse V′ qu'elle peut prendre à raison de sa distance à l'axe fixe, étant donnée ; pour tenir cette résistance en équilibre, il suffira de faire ensorte que le *produit* de la puissance P par la vitesse V soit égal à Q *multiplié par* V′. Or on peut arriver à cette égalité par deux voies différentes. Si la force P que l'on est dans le cas d'employer, est limitée, et insuffisante, il faudra lui donner une plus grande vitesse, c'est-à-dire la transporter à une plus grande distance de l'axe, et l'égalité désirée aura ainsi lieu. Si c'est au contraire la vitesse V qui est trop petite, et ne peut suffire, on parviendra au même but en augmentant convenablement la force P. Ainsi suivant les circonstances et le besoin, on sacrifiera ou *plus de force* ou *plus de temps*, qui sont les seules choses dont nous puissions disposer ici. Lorsqu'un pilot trouve trop de résistance ; on peut le forcer à pénétrer encore dans le sol, soit en élevant plus haut la masse choquante, soit en augmentant le poids de cette même masse.

Pareillement supposons qu'on ait donné la grandeur de la puissance ainsi que sa vitesse virtuelle, ou sa distance à l'axe, le produit de la multiplication de ces deux quantités sera la mesure de tout l'effet qu'on peut obtenir par leur moyen. Mais la grandeur de la résistance, ainsi que la vitesse qu'elle peut prendre, étant encore indéterminées, on pourra à volonté faire l'une des deux plus grande, pourvu qu'on rende l'autre proportionnellement plus petite, de manière à donner toujours par leur mutuelle multiplication un même produit, égal à celui de la puissance et de sa vitesse propre. Ainsi la *même force* pourra élever dans le

même espace de temps, ou un fardeau de *cent* livres avec une vitesse de *dix* pieds par seconde, ou un fardeau de *mille* livres, mais en ne lui donnant qu'une vitesse d'*un* pied dans le même temps.

Maintenant si c'est là tout ce que la force donnée peut produire lorsqu'on l'applique immédiatement à la résistance, il ne faut pas croire qu'il y ait aucune machine, ni aucune combinaison de machines qui puisse rendre cette force capable de communiquer une *plus grande* vitesse à la *même* masse, ou la *même* vitesse à une *plus grande* masse. Non : l'effet ne saurait être accru d'aucune manière, tant que la force demeure la même. Prétendre le contraire ce serait vouloir qu'une puissance fût plus grande qu'elle-même, ce qui est absurde : ce serait supposer qu'une machine a en elle-même une vertu secrète qui s'ajoute à la puissance donnée, ce qui n'est pas moins absurde. Lors donc que l'effet dont une puissance est capable, est connu, il ne faut pas croire que cet effet puisse être augmenté d'aucune façon, si la puissance ne reçoit aucun accroissement. C'est là un principe invariable, qu'on ne doit jamais perdre de vue.

3. *De la force nécessaire pour obtenir un même effet.*

Lorsque l'équilibre doit être maintenu pendant un certain temps, ou que l'effet exprimé par QV′ doit être répété un certain nombre de fois, quelque moyen que l'on emploie pour cela, la quantité de force dépensée à chaque instant sera toujours la même. Ainsi un homme qui au moyen d'une machine quelconque,

travaille à élever un fardeau jusqu'à une hauteur donnée, en lui communiquant une certaine vitesse uniforme, dépense à chaque instant la même quantité de force, et il dépense encore autant de force que feraient *dix* hommes qui élèveraient ensemble le même fardeau à la même hauteur. Il faudrait au premier *dix fois* plus de temps, si chacun de ceux-ci développait la même force que lui ; ou si le temps était le même, le premier serait forcé d'agir avec une vitesse *dix fois* plus grande. Dans le premier cas il serait obligé de réitérer le même effort pendant *un temps décuple* ; dans le second la vitesse étant *dix fois plus grande*, il est visible que la dépense de force suivrait encore la même proportion.

Au moyen du temps, ou ce qui est la même chose, en diminuant la vitesse V′ de la résistance, une puissance médiocre devient capable d'un effort considérable, et qui semblait au-dessus de ses forces. Un enfant appliqué à une machine, en répétant à chaque instant de petits efforts, peut au bout d'*un certain temps* produire un effet dont son âge et ses forces ne paraissaient pas capables. De là ce principe fondamental en mécanique, que *ce qu'on gagne du côté de la force, on le perd nécessairement du côté du temps :* et réciproquement que *pour gagner du côté du temps, il est indispensable de perdre du côté de la force.*

4. *Considérations sur l'effet obtenu.*

L'effet obtenu peut à son tour devenir puissance, et il doit rendre dans ce cas toute la force qui a été employée pour l'obtenir. Il peut rendre cette force ou en

détail et successivement, ou *subitement et tout à la fois:* mais dans les deux cas la dépense de force est la même, et ne peut être ni plus grande, ni plus petite que celle qui a été primitivement employée. Le sauvage bande son arc avec effort, et au moment où il le lâche, la flèche part avec une rapidité que le bras de l'homme n'eût pas été capable de lui communiquer. C'est que l'arc en se débandant tout-à-coup, dépense en *un instant* toute la force qui a été employée *pendant plusieurs instans successifs* pour le tendre. De même dans les machines dont les anciens se servaient pour lancer des pierres, et qui ne pouvaient être montées qu'en employant beaucoup de bras et beaucoup de temps, la force communiquée au *projectile* devait être très-considérable, puisqu'elle était le développement *instantané* de toute celle qui avait été employée pour monter la machine.

Au contraire un ressort de pendule déploie *successivement* et avec une utile lenteur, la force qui a servi à le bander. Il est évident que ce ressort n'a, et ne peut avoir d'autre force que celle qui a mis en jeu son élasticité ; et par conséquent qu'il ne fait en se développant, que rendre en fidèle dépositaire la puissance qui lui a été confiée. Dans l'exemple de l'arc, cette force se déploie en un instant ; et comme la résistance qui est la masse de la flèche, est peu de chose, il y a une grande vitesse communiquée. Dans l'exemple du ressort du pendule, la force se développe avec une extrême lenteur ; et quoique la résistance soit encore peu de chose, l'effet néanmoins est assez considérable, si l'on a égard à sa durée ; et il est le même que celui que l'horloger aurait produit, en agissant immédiatement sur le

rouage, et dépensant avec la même économie la force qu'il a employée à monter le ressort.

Lorsqu'une certaine résistance a été vaincue, et qu'elle devient à son tour une puissance, elle ne peut donc rendre que la même force qui a suffi pour la vaincre. Cette force pourra se développer pendant un temps plus ou moins long, et produire des effets *différens par leur durée* : mais ils seront toujours *égaux par leur grandeur absolue*. Des hommes élèvent ensemble une lourde masse, et la laissent ensuite retomber. Cette masse en arrivant au point où on l'avait prise, et tombant avec une vitesse accélérée, n'a néanmoins qu'une force égale à celle qui l'a élevée. En effet si elle a été portée par exemple, à une hauteur de *quinze* pieds en *une* seconde de temps ; en descendant elle parcourra ces *quinze* pieds pareillement en *une* seconde, et elle frappera l'obstacle qui lui est soumis, avec une vitesse double, ou de *trente* pieds par seconde : cette vitesse sera, comme on sait, le résultat des actions réitérées de la pesanteur pendant la durée de la chute. Mais les hommes qui ont élevé cette masse dans une seconde, ont eu à lutter contre la pesanteur pendant ce même temps, et à détruire dans la masse élevée la vitesse que cette puissance tendait à lui communiquer en *une* seconde, c'est-à-dire une vitesse égale à celle dont elle est animée à son retour. Donc il y a encore ici *égalité entre la force employée et l'effet obtenu.*

Pour rendre cette conséquence plus sensible, imaginons qu'on remplace l'action continuée de nos ouvriers par une impulsion de bas en haut. Cette impulsion devra être de *trente* pieds par seconde, pour que la masse s'élève à la hauteur de *quinze* pieds dans la

première seconde : mais là, toute la force impulsive étant épuisée, le corps commencera à retomber, et lorsqu'il sera revenu au point de son départ, il aura acquis en sens contraire cette même vitesse de *trente* pieds par seconde. Il est visible que l'effort des ouvriers produisant le même effet que l'impulsion supposée, doit en être l'équivalent et s'estimer de même.

S'il fallait plus d'*une* seconde pour porter le poids à la hauteur de *quinze* pieds, la vitesse ascensionnelle serait moindre; mais il faudrait combattre la pesanteur pendant un temps plus long, ce qui reviendrait au même : il y aurait ici *moins* de force et *plus* de vitesse consommées. C'est donc encore un principe qu'*il ne peut y avoir dans une puissance que la force qui y a été mise, et rien de plus.*

5. *Des forces employées dans les machines.*

Les forces que l'on emploie comme puissance dans les machines, sont de différentes espèces. C'est une masse pesante, comme dans les horloges, ou l'action élastique d'un ressort comme dans les montres de poche, ou le choc d'un fluide comme dans les diverses sortes de moulins, ou enfin la force des hommes et des animaux comme dans un grand nombre de cas. Les résistances sont aussi de diverse nature : c'est un fardeau à soulever, un courant à vaincre, un obstacle à renverser, un effort contraire à surmonter.

Entre des corps pesans mis en opposition au moyen d'une machine l'équilibre peut subsister éternellement, si les momens sont égaux, et que le point fixe soit capable d'une résistance suffisante, et sans fin. Lorsqu'il

s'agit de la force des hommes ou de celle des animaux, il faut comme on a dit, avoir égard au temps pendant lequel elle doit s'exercer. On a trouvé par expérience, qu'un homme appliqué à une manivelle peut soutenir pendant *huit* heures de suite un fardeau pesant *vingt-cinq* livres, et lui communiquer pendant ce temps une vitesse de 44 pouces par seconde. C'est là la mesure de tout l'effort dont un homme est capable par la force de ses bras. C'est en vain qu'on espèrerait par une invention quelconque en tirer quelque chose de plus. Il est tout-à-fait impossible ou qu'il agisse pendant un temps plus long, ou qu'il soutienne une masse plus lourde, ou qu'il lui fasse prendre plus de vitesse.

6. *Division des machines.*

On divise les machines en deux classes, les machines *simples* et les machines *composées.* Quoiqu'il y ait un assez grand nombre de machines simples, on peut néanmoins les réduire à *trois*, les *cordes*, le *lévier* et le *plan incliné.* On pourrait même les ramener toutes au lévier. Quelques-uns ne mettent pas les cordes au rang des machines : cependant comme elles favorisent l'application des puissances, et qu'elles en changent souvent la direction, nous les considérerons selon l'usage le plus général, comme une sorte de machines, qu'on désigne souvent sous le nom de *machine funiculaire* ; et c'est par là que nous allons commencer.

CHAPITRE IV.

DES CORDES.

Nous supposerons d'abord que les cordes n'ont point de pesanteur, ou plutôt nous ferons abstraction de leur poids; et nous les considèrerons comme réduites à leur axe; parce qu'elles ne sont dans le moment pour nous que des moyens de transmettre l'action des forces, et que cette transmission se fait toujours par l'axe de la corde.

1. *De la tension des cordes.*

Soit donc deux puissances luttant l'une contre l'autre à l'aide d'une corde. Cette corde, comme il est évident, éprouvera une *tension :* elle se trouvera tirée dans deux sens opposés, et il se fera un effort pour la rompre. Si la corde est capable de résister, elle opposera aux puissances qui tendent à la rompre, une puissance égale; et c'est cette dernière que l'on désigne par le mot de *tension.*

Il est facile de voir que, si les deux forces que l'on considère sont égales, *la tension que supporte la corde, est exprimée par l'une seulement de ces deux forces.* En effet le cas est le même que si la corde étant attachée à un point fixe, la force en question faisait effort contre

le point d'attache. Dans ce cas il est certain que la tension de la corde ne saurait être plus grande que la force employée à la tendre. Au lieu du point fixe substituons une seconde force qui agisse en sens contraire de la première ', et lui soit égale. Il est évident que l'introduction de cette seconde force ne peut augmenter la tension de la corde ; puisque la force introduite ne remplit, et ne peut remplir que les mêmes fonctions que le point fixe. Ainsi la tension d'une corde est toujours mesurée par l'une des deux forces *égales*, qui se font équilibre par son moyen.

Si les forces qui agissent l'une contre l'autre sont *inégales*, *la tension de la corde*, *est alors mesurée par la plus petite de ces deux forces.* Car celle-ci étant obligée de céder à la plus grande, doit être entraînée dans le sens de cette dernière avec une force égale à la différence des deux, et la corde aussi sera entraînée de la même façon. L'excès de la plus grande force sur la plus petite ne peut donc faire éprouver à la corde aucune nouvelle tension. Donc toute la tension que cette corde éprouve, est simplement égale à la plus petite des deux forces.

2. *Equilibre entre trois forces.*

Considérons maintenant *trois* forces agissant les unes contre les autres au moyen de trois cordons, et supposons d'abord que ces cordons soient unis par un même nœud. Si ces trois forces sont en équilibre, l'une quelconque d'elles doit être égale et opposée à la résultante des deux autres. Soient donc les forces P, Q et S (fig. 46) agissant suivant les droites AB, AC, AD ;

les deux premières étant représentées par les parties AB, AC de leurs directions, la troisième le sera par AD égale et opposée à AE résultante des deux autres. Ainsi les trois forces dans le cas d'équilibre, *sont entre elles comme les trois côtés du triangle ABE ;* c'est-à-dire qu'on a alors : P *est à* Q *est à* S, *comme* AB *est à* BE *est à* AE.

Si l'on décrit une circonférence de cercle qui passe par les trois points A, B, E, les lignes AB, BE, AE seront les *soutendantes* des arcs sur lesquels chaque angle du triangle est appuyé, et les moitiés de ces lignes seront les *sinus* de ces mêmes angles. On aura donc : P *est à* Q *est à* S, *comme* le sinus de l'angle E *est au* sinus de l'angle A *est au* sinus de l'angle B. Or l'angle E est celui que font entre elles les forces Q et S, l'angle A, celui des forces P et S, et l'angle B, celui des forces P et Q. L'on peut donc dire, que dans l'équilibre entre trois forces au moyen de cordons assemblés par un même nœud, *chacune des forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

Si l'une des trois forces était remplacée par un point fixe, on aurait la *tension* du cordon attaché à ce point toujours égale et opposée à la résultante des deux autres forces, et par conséquent proportionnelle au sinus de l'angle que ces forces font entre elles.

Au lieu de supposer les cordons assemblés par un même nœud, concevons que les forces P et Q (fig. 47), sont appliquées aux deux bouts d'une même corde, et que la force S agit au moyen d'un cordon attaché à un anneau qui peut glisser le long de la corde PQ. Dans ce cas il faudra pour l'équilibre, 1.° que *l'angle PAQ*,

soit partagé en deux parties égales par la direction de la force AS ; 2.° que *les deux forces P* et *Q*, *soient aussi égales entre elles.*

La première condition est nécessaire pour que l'anneau ne puisse se mouvoir d'aucun côté : car étant placé entre deux droites AP, AQ également inclinées à la direction AS de la force qui le sollicite, il est évident qu'il n'y a pas de raison pour qu'il s'avance sur l'une plutôt que sur l'autre. Donc il demeurera en repos, s'il est dans la position qu'on a dite. Dans tout autre cas, il *glissera* ou vers P, ou vers Q, jusqu'à ce que cette première condition se trouve remplie.

La deuxième condition est une conséquence nécessaire de la première : car les forces P et Q suivant ce qu'on vient de dire, devant être entre elles comme les sinus des angles SAQ, SAP, et ces angles étant égaux par supposition, il suit que ces forces sont égales. C'est au reste ce que l'on peut encore conclure facilement de ce que les deux forces agissent l'une contre l'autre au moyen de la corde PAQ. On sait qu'elles ne peuvent être en équilibre qu'autant qu'elles sont *égales ;* et quoiqu'il y ait ici une troisième force S qui détourne sur elle-même une partie de leur action, cela ne peut pas empêcher que les efforts qu'elles opposent l'une à l'autre, ne soient encore égaux, à cause de la continuité de la corde PAQ, qui évidemment ne peut pas être plus tendue dans une partie que dans l'autre.

3. *Equilibre lorsque la corde est attachée à deux points fixes.*

A la place des deux forces P et Q, on peut supposer deux points fixes (fig. 48), où la corde est attachée

par ses deux bouts. Dans ce cas lorsque l'anneau est parvenu dans la position convenable pour l'équilibre, les deux points fixes auront à supporter des efforts *égaux*, et les deux parties de la corde se trouveront également tendues. Cette tension *sera* à la force S, *comme* le sinus de la moitié de l'angle PAQ *est au* sinus de cet angle tout entier. Si l'on fait passer encore une circonférence de cercle par les trois points A, P, Q, et que l'on mène les droites PQ et PR, celles-ci pourront servir à exprimer le même rapport, et la tension de la corde *sera* à la force S, *comme* PR *est à* PQ.

Si la force S est un poids, la ligne AS sera verticale ; et si d'ailleurs on suppose que les deux points P et Q sont dans une même ligne horizontale, on aura de même : la *tension* du cordon AP, ou du cordon AQ, ou ce qui est la même chose, l'effort que supporte le point P dans le sens AP, ou le point Q dans le sens AQ *est au* poids S, *comme* PR *est à* PQ.

A mesure que la corde PAQ devient plus courte, les points P et Q étant fixes et invariables, le poids S s'élève de plus en plus, et les directions PA et AQ s'éloignent moins de la direction horizontale ; PR augmente parce que le centre du cercle est toujours plus éloigné, et PQ qui demeure le même devient ainsi proportionnellement plus petit. La tension produite par un *même* poids devient donc de plus en plus grande, et les points fixes ont à supporter un effort de plus en plus considérable.

Enfin si l'on supposait que la corde n'a que la longueur PQ, et qu'elle est néanmoins *extensible*, la force S appliquée au milieu de sa longueur, la fera fléchir sur-le-champ, quelque petite que soit cette

force, et il se fera en même temps sur les points fixes P et Q un effort extrêmement considérable. En voici la preuve. Si la corde PQ conservait sa position horizontale, il s'ensuivrait que la force verticale S qui n'est détruite par aucune force contraire, demeurerait sans effet : ce qui ne se peut pas. Or l'effet de cette force est d'obliger à descendre le point où elle est appliquée. La corde fléchira donc un peu, et prendra la position PA'Q : mais alors l'effort supporté par les points P et Q *sera* toujours à cette force S, *comme* le sinus de la moitié de PA'Q *est au* sinus de cet angle tout entier. L'angle PA'Q étant dans le cas présent, infiniment ouvert, et la ligne brisée PA'Q différant très-peu d'une ligne droite, le sinus du demi-angle sera égal à l'*unité* (1), et celui de l'angle total sera *une très-petite fraction*. Donc la tension des cordons, ou l'effort exercé sur les points d'appui contiendra la force S *autant de fois* que l'unité peut contenir une fraction très-petite, c'est-à-dire, *un très-grand nombre de fois*.

Une petite force peut donc produire un effet très-grand, et beaucoup supérieur à elle-même. Cette conséquence singulière demande une explication, parce qu'elle paraît contrarier l'idée qu'on a généralement du rapport d'*égalité* qui doit exister entre *la*

(1) Le demi-angle sera à très-peu près un angle droit, dont le *sinus*, comme on sait, est égal au rayon du cercle. C'est le plus grand des *sinus* : on l'exprime ordinairement par l'unité. L'angle total vaudra aussi très-près de deux angles droits, ou de la demi-circonférence, et son sinus ne sera guère au-dessus de zéro.

cause et ses effets. Comment donc peut-il se faire qu'une puissance d'*une* livre, par exemple, produise, dans le cas que nous considérons ici, un effort de *cent* livres, ou même plus? Pour répondre à cette question, j'observe d'abord qu'une force d'*une* livre n'a, et ne peut avoir besoin pour être contre-balancée que d'une force *égale*, pourvu que celle-ci lui soit directement *opposée.* Mais si l'on voulait balancer cette force d'*une livre* par une force qui fût inclinée à sa direction, il est évident que la chose ne serait pas possible, quelle que fût la grandeur de la force qu'on prétendrait employer pour obtenir cet effet.

Deux forces non opposées ne sauraient se détruire, et à raison de leur inclinaison, elles ont toujours, comme on sait, une *résultante*, qui ne peut être *nulle.* Cette force d'*une livre* ne peut donc être détruite en totalité par aucune force qui ne lui serait pas directement opposée. Mais elle pourra l'être par le concours de deux forces, qui lui seraient l'une et l'autre inclinées; il suffit pour cela que la résultante de celles-ci soit égale et opposée à cette force d'une livre. Or la chose, comme il est évident, peut se faire d'une infinité de manières différentes, puisque la même droite peut être la diagonale d'un nombre illimité de parallélogrammes, dont les côtés seraient différens en grandeur et en direction.

Voici donc ce qui arrive dans le cas que nous considérons ici. Les deux forces P et Q (fig. 49) quelque grandes qu'elles soient, n'ont pourtant qu'une résultante égale à S; et c'est au moyen de cette résultante qu'elles contre-balancent celle-ci. Leur action *absolue* est sans doute beaucoup plus grande : mais il n'y en a

qu'*une petite portion* qui soit employée à produire l'équilibre : le *reste* se détruit par son opposition, comme on peut le prouver aisément, en faisant usage du principe de la décomposition des forces. En effet P représenté par *ab*, se décompose dans les deux forces *bc* et *be* : Q représenté par *bd* donne de même pour ses composantes les deux forces *bc* et *bf*. Les forces *bc* qui agissent dans le même sens, s'ajoutent ensemble et produisent la force *bg* égale et opposées à S : quant aux forces *be* et *bf*, comme elles sont égales et opposées entre elles, elles se détruisent mutuellement. Il n'y a donc qu'une certaine partie des forces P et Q qui soit employée à tenir en équilibre la force S. Le fait en question se trouve donc expliqué conformément aux principes de la mécanique.

Il resterait à dire que c'est la force S qui donne naissance aux forces P et Q, et qu'on a de la peine à concevoir comment cette force peut produire quelque chose de plus grand qu'elle-même. Il est vrai qu'on a supposé que la corde était justement de la longueur PQ, et qu'elle était sans pesanteur. Ainsi la tension était nulle avant l'introduction de la force S. C'est donc cette dernière qui produit les tensions P et Q beaucoup plus grandes qu'elle-même. Mais d'abord comme ces tensions lui sont extrêmement inclinées, elle ne produit réellement *dans sa direction propre* qu'un effort qui lui est égal ; et si ceux qui se font aux points d'attache, sont beaucoup plus grands que celui-là, c'est qu'il est nécessaire qu'ils le soient ; pour qu'il puisse en résulter dans le sens opposé à S une force égale et qui tienne celle-ci en équilibre. D'un autre côté si les forces P et Q n'existaient pas d'une manière

apparente dans le premier instant, elles existaient en quelque sorte *virtuellement*, et ne demandaient pour se manifester qu'un léger changement dans la longueur et la position de la corde PQ. Ce changement opéré par la force S, les a fait paraître dans toute leur énergie et leur opposition, de sorte qu'il ne se passe ici rien de contraire aux principes.

Expérience. Voici une expérience remarquable qui confirme ce qui vient d'être dit, et qui y trouvera aussi son explication. Une vessie (fig. 50) est attachée à un point fixe par son goulot, et porte suspendu à son fond un poids de 25 à 30 kilogrammes. Ce poids lorsque la vessie est entièrement vide d'air, repose sur un plan horizontal, de manière que la vessie n'a aucun effort à faire pour le soutenir; et qu'elle est seulement légèrement tendue dans le sens vertical. Les choses étant dans cet état, si au moyen d'un bout de tuyau on souffle de l'air dans l'intérieur de cette vessie, aussitôt on la voit se gonfler peu à peu : son diamètre horizontal s'étend, le diamètre vertical s'accourcit, et l'on voit le poids qui y est attaché, s'ébranler, quitter son support, et s'élever. Il ne faut donc pour soulever ce poids de 25 à 30 kilogrammes, que l'effort médiocre par lequel on pousse de l'air dans l'intérieur d'une vessie.

Cette expérience qui toujours excite quelque surprise dans ceux qui en sont témoins, s'expliquera facilement d'après nos principes. La puissance qui agit ici, c'est la force expansive de l'air poussé dans la vessie. Cet air comme tous les fluides, exerce son action perpendiculairement aux parois qui le contiennent. Si donc nous n'avons égard qu'à l'effort qui se fait contre

la partie la plus renflée, nous pourrons considérer la courbe *cbd* comme une ligne brisée composée de deux parties égales, et sur le milieu de laquelle est appliquée une force qui agit dans le sens *ab*. *cbd* formait d'abord une ligne droite, verticale et flexible. Une force peu considérable à la vérité, est venue agir contre cette droite perpendiculairement à sa longueur. Il est évident que la résistance des points *c* et *d* n'a pas pu empêcher l'effet de cette action ; il a donc fallu que la droite cédât et devînt angulaire : les deux points *c* et *d* dont l'un est mobile, ont été forcés de se rapprocher, et le poids M a été soulevé. Mais il ne faudrait pas croire que l'effort fait par les muscles de la bouche, si c'est avec la bouche qu'on a poussé l'air, soit ici la seule chose qui soutienne le poids : la très-grande partie en est supportée par le point fixe *c*, ainsi qu'on pourrait encore le démontrer en décomposant les puissances qui agissent dans les sens *cb* et *bd*, comme on l'a fait dans l'exemple précédent. Il suit de là que la force qui agit ici, ne produit encore que l'effet dont elle est capable ; et lorsqu'on cesse de pousser de l'air, ou de le retenir, le poids redescend lentement en chassant peu à peu tout l'air introduit.

Ceci rappelle et confirme le principe établi plus haut, et sur lequel je crois à propos d'insister, qui est: que *l'effet ne saurait être plus grand que la cause à qui il est dû.* Il y a plus : si l'on a soin de ne rien négliger, et qu'on tienne fidellement compte de tout, on trouvera toujours une *égalité parfaite* entre la puissance qui a agi, et la somme des effets qu'elle a produits : ceux-ci sont naturellement la mesure de celle-là ; et quelle que soit la succession de ces effets, quelques

changemens qu'ait éprouvés la cause première pendant son action ; on peut dire que le résultat final n'est que cette même puissance, dont la forme a pu changer, mais dont la grandeur est toujours demeurée la même. C'est ainsi que dans la résolution d'un problème d'algèbre, la dernière égalité où l'on arrive, était implicitement contenue dans la première, ou plutôt elle n'est que celle-ci modifiée, et non altérée, par les différentes transformations qu'elle a subies.

Cependant on lit dans un Traité de mécanique d'ailleurs fort estimable, cette singulière proposition : *Il est faux d'avancer que les effets sont proportionnels à leurs causes.* Il faut avouer qu'un principe pareil, énoncé d'une manière aussi formelle, est un étrange paradoxe en mécanique. Car s'il est faux de dire que les effets sont proportionnels à leurs causes ; il sera donc vrai de soutenir que les effets peuvent ne pas être en proportion avec les causes qui les produisent ; et alors il sera permis d'attendre d'une cause quelconque un effet supérieur à elle-même ; ce qui est évidemment impossible. Il est donc très-important de s'en tenir sur cela au principe que nous avons posé ; et si quelques faits particuliers offrent des difficultés, et semblent être contraires à la loi établie, on trouvera en examinant la chose avec attention, que cela vient toujours de ce que les mots de *cause* ou d'*effet* auront été mal entendus. Revenons à notre sujet.

4. *De la courbure que les cordes prennent par leur poids.*

On a vu qu'une corde supposée sans pesanteur, étant attachée et tendue entre deux points fixes situés

dans une même droite horizontale, il suffisait pour la faire fléchir, d'un petit poids suspendu au milieu de sa longueur. Il suit de là que la pesanteur naturelle de la corde produira nécessairement le même effet, et que quelque force que l'on emploie pour tendre une corde pesante dans le sens horizontal, jamais elle ne formera une ligne parfaitement droite, et toujours son poids lui fera prendre *quelque courbure*. Ce n'est que dans le sens vertical qu'une corde peut être tendue en ligne droite : dans toute autre position, sa pesanteur ne pouvant être détruite par les points où elle est attachée, il faut que cette pesanteur produise son effet, et que la corde *se courbe* plus ou moins.

Il est facile de faire voir que la courbe formée par une corde *pesante* suspendue par ses deux bouts, est toute entière dans un plan vertical. Soit en effet une corde *sans pesanteur* attachée aux points fixes P et Q (fig. 51); soient aussi divers poids suspendus aux points A, B, C, D, etc. de cette corde; je dis que l'équilibre étant établi, la corde formera une espèce de *polygone* dont tous les côtés seront dans un même plan, et que ce plan sera vertical. Les tensions AP et AB, et le poids AM étant trois forces en équilibre, sont nécessairement renfermées dans le même plan, et puisque AM qui est une droite verticale, y est contenue, ce plan est donc *vertical*. De même les trois droites AB, BN, BC, sont dans un plan vertical : mais celui-ci est le même que le précédent, puisqu'ils renferment l'un et l'autre la même droite AB. On prouverait la même chose pour le reste du polygone. Donc il est tout entier dans le plan vertical mené par les points P et Q. Mais si l'on imagine que des poids égaux sont répandus sur toute

la longueur de la corde, ou ce qui revient au même, si on lui rend sa pesanteur, au lieu d'un polygone on aura une *courbe continue*, qui se trouvera dans le même cas, c'est-à-dire qui sera toute entière *dans le plan mené verticalement* par les deux points où la corde est attachée.

La courbe que les cordes forment ainsi par l'effet de leur pesanteur, s'appelle *courbe funiculaire:* on la nomme aussi *chaînette*, ou *caténaire*, parce qu'une chaîne suspendue de même, et livrée à la seule action de la pesanteur, forme une pareille courbe. Les mathématiciens se sont fort occupés de la nature et des propriétés de cette espèce de courbe. Nous nous contenterons de donner ici quelques-uns des résultats dus à leurs travaux.

Soit une corde pesante ACB (fig. 52) attachée aux points A et B, situés ou non, sur une droite horizontale : la corde formera une courbe à peu près telle qu'on la voit ici. Si aux deux extrémités de cette courbe on mène des tangentes, et qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles se croisent en O, et que par ce point O on élève une droite verticale GX ; on aura les tensions des deux bouts de la corde, ou les efforts sur les points fixes A et B, *réciproquement proportionnels* aux sinus des angles que font les tangentes AO, BO avec la verticale GX ; c'est-à-dire que l'effort en A *est à* l'effort en B, *comme* le sinus de BOG *est au* sinus de AOG.

Cette proportion étant la même que celle qu'on aurait eue avec une corde non pesante et un poids suspendu dans la verticale GX, il suit que tout le poids de la corde peut être considéré comme agissant suivant cette direction ; et par conséquent que la droite verticale

menée par le point où concourent les tangentes extrêmes, passe par le centre de gravité de la corde. On a trouvé que de toutes les courbes terminées aux points A et B, et ayant la même longueur que la courbe funiculaire ACB, c'est celle-ci qui a son centre de gravité placé *plus bas*.

On a un exemple frappant de la courbure que prennent les cordes par leur poids, dans les longs cordages par lesquels sont tirés les bateaux et les diligences d'eau. Ces cordages se courbent tellement qu'on croirait souvent qu'ils sont lâches et flottans, tandis que le mouvement de la barque ne peut laisser aucun doute sur la grande tension qu'ils éprouvent.

Il faut observer ici que lorsque les cordes sont employées à tirer, l'action de la puissance sur la résistance se fait sentir dans le sens de la tangente à la courbe qu'elles forment. Il faut donc avoir attention qu'aucune partie de cette puissance ne soit perdue par la mauvaise direction de cette tangente. Si donc la résistance doit se mouvoir sur un plan horizontal, il faut éviter que la tangente à la courbe au point d'attache, soit dirigée contre le plan, ou s'élève au-dessus de lui de bas en haut. Dans l'un et l'autre cas il y aurait de la force perdue, ce qui n'arrive pas lorsque cette tangente est parallèle au plan.

CHAPITRE V.

DU LÉVIER.

LE lévier est la seconde des machines simples : on entend par-là *une verge inflexible*, *droite ou courbe*, que l'on suppose d'abord sans pesanteur, et qui est appuyée par quelque point de sa longueur contre un obstacle fixe, autour duquel elle peut se mouvoir. Les deux forces que l'on met en équilibre par son moyen, sont appliquées en deux points différens de cette même longueur, et peuvent agir dans des directions quelconques.

1. *Principe d'équilibre dans le lévier.*

Soient donc deux forces P et Q (fig. 53) appliquées aux points A et B d'un lévier qui a son appui en C; et cherchons quelles doivent être ici les conditions de l'équilibre.

D'abord les *directions des forces doivent être dans un même plan*, *et le point d'appui doit aussi se trouver dans ce plan*, afin que les deux forces puissent avoir une résultante, et que cette résultante puisse être détruite par la résistance du point d'appui. Il faut donc qu'en prolongeant les directions des deux forces, ces

directions aillent se rencontrer quelque part en un point D. Mais il faut encore que les grandeurs de ces forces soient telles, qu'en construisant comme de coutume le parallélogramme DECF, dont les côtés DF et DE sont proportionnels aux forces P et Q, *la diagonale de ce parallélogramme soit dirigée vers le point fixe C.*

Si du point C on abaisse sur les directions des forces les perpendiculaires CG, CK, ces perpendiculaires auront entre elles le même rapport que les droites CE, CF qui représentent les forces. Donc dans le cas d'équilibre, les forces sont entre elles *réciproquement* comme les perpendiculaires abaissées du point d'appui sur leurs directions.

Ce résultat s'accorde parfaitement avec la théorie des *momens.* D'après cette théorie *il y a équilibre entre deux forces, lorsque leurs momens par rapport à un point de leur résultante sont égaux.* Dans ce cas les efforts qui se font de part et d'autre pour faire tourner le système autour de ce point, sont égaux et opposés; et par conséquent tout demeure en repos. Or le moment de la force P par rapport au point C qui appartient à la résultante, est P *multiplié* par CK, et celui de la force Q par rapport au même point, est Q *multipliant* CG. L'équilibre exige donc que *ces deux produits soient égaux*, ou ce qui est la même chose, que P *soit à* Q *comme* CG *est à* CK.

Les deux conditions qu'on vient d'établir, suffisent lorsque le lévier est arrêté invariablement au point C, et qu'il ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de ce point. Mais s'il est simplement appliqué contre un obstacle, et qu'il puisse glisser suivant sa longueur, pour que ce dernier mouvement ne puisse pas

avoir lieu, il faut en outre que *la direction de la résultante DC soit perpendiculaire en C à la surface de l'obstacle.* Par ce moyen cette force sera entièrement détruite, et le système ne pourra prendre aucun mouvement.

2. *Charge du point d'appui.*

Après avoir déterminé les conditions de l'équilibre dans le lévier, il est nécessaire de trouver la charge que supporte dans tous les cas le point fixe. Cette charge, comme il est évident, *est toujours égale à la résultante des deux forces.* Celles-ci étant représentées par les parties DE, DF de leurs directions, la résultante le sera par la diagonale DC. Ainsi l'effort que supporte le point d'appui *est égal* à la force P par exemple, prise *autant de fois* que DC contient DF, ou bien à la force Q répétée *autant de fois* que DC contient DE.

Si les forces sont parallèles, la résultante est égale à leur somme, ou à leur différence, selon qu'elles agissent dans le même sens, ou en sens contraire. Donc on a alors la charge du point d'appui *égale à P plus Q* dans le premier cas, et *à P moins Q* dans le second. Cette charge d'ailleurs se fait sentir *parallèlement* aux directions des forces.

3. *Problème général concernant le lévier.*

L'égalité que nous avons trouvée pour le cas d'équilibre dans le lévier, lorsque le point d'appui et les points d'application des forces sont connus, cette égalité, dis-je, nous fournit un moyen facile de résoudre ce problème général : Des quatre quantités variables entre lesquelles l'équilibre est établi, les grandeurs des deux forces et leurs directions, trois étant données, trouver

la quatrième. En effet si c'est une des forces que l'on demande, on l'aura aisément *en divisant le moment de l'autre force par la perpendiculaire* abaissée du point d'appui sur la direction connue de la force demandée. Mais si les deux forces sont données, ainsi que la direction de l'une d'elles, et qu'on veuille connaître quelle doit être pour l'équilibre la direction de l'autre force ; on commencera par *diviser le moment de la première force par la grandeur de celle-ci ;* et prenant une ouverture de compas égale au quotient obtenu, du point d'appui C comme centre, on décrira une circonférence de cercle. Enfin du point d'application B on mènera une droite *tangente* à cette circonférence, et ce sera là la direction que devra prendre la force donnée Q pour faire équilibre à la force P, dont la grandeur et la direction étaient pareillement données.

Comme on pourra en général mener deux tangentes du point B, la force Q pour l'équilibre pourra prendre deux directions différentes. Si l'on ne pouvait pas mener de tangente, il faudrait en conclure que le problème n'est pas possible avec les quantités données.

Toute la théorie du lévier se trouve renfermée dans ce qu'on vient de dire. Nous allons maintenant présenter quelques observations sur l'usage et l'utilité de cette machine la plus simple de toutes, et en même temps la plus avantageuse. Nous aurons soin de confirmer par l'expérience tout ce qui pourra être rendu plus sensible par ce moyen.

4. *Trois espèces de léviers.*

Il y a dans la longueur d'un lévier trois points remarquables : le point d'appui, et les deux points où

sont appliquées la puissance et la résistance. Ces trois points peuvent être diversement placés entre eux, et l'on a pris de là occasion de distinguer *trois* sortes de léviers. On appelle lévier de *la premiere espèce*, celui où le point d'appui est placé entre les deux forces : dans le lévier de *la seconde espèce*, c'est la résistance qui est entre la puissance et le point d'appui ; enfin on a le lévier de *la troisième espèce*, quand le point d'application de la puissance se trouve situé entre les deux autres points.

Les conditions de l'équilibre sont toujours les mêmes dans ces trois espèces de léviers : mais chacun d'eux peut procurer à la puissance un avantage plus ou moins considérable ; et c'est ce que nous avons à examiner ici. On rencontre fréquemment dans les arts mécaniques des léviers de tous les genres, ou du moins des instrumens et des outils qui peuvent facilement se rapporter au lévier. Les mêmes considérations nous apprendront à apprécier la grande utilité de toutes ces inventions.

Nous supposerons que les léviers que nous allons considérer, sont droits : c'est en effet leur forme la plus ordinaire. Mais pour le moment nous n'aurons aucun égard à leur poids. Nous supposerons de plus que les forces agissent dans des directions perpendiculaires à la longueur du lévier : c'est la direction qui leur est le plus avantageuse, les perpendiculaires abaissées du point fixe, étant alors égales aux parties du lévier comprises entre le point d'appui, et les points où les forces sont appliquées, c'est-à-dire *aux bras du lévier*. Dans tout autre cas ces perpendiculaires sont plus courtes, et les forces perdent une

partie de leur avantage. Si l'une de ces forces s'inclinait jusqu'au point d'agir dans le sens de la longueur du lévier, alors la perpendiculaire qui sert à mesurer la grandeur du moment de cette force, devenant nulle, il s'ensuivrait que ce moment serait pareillement nul, et que la force ainsi dirigée ne pourrait en aucune façon tenir en équilibre la force opposée : elle s'épuiserait toute entière et vainement contre le point d'appui. On considérera donc les forces comme appliquées perpendiculairement à la longueur du lévier, à moins qu'il ne soit dit autrement.

5. *Du lévier de la première espèce.*

Soit un lévier de longueur donnée, et supposons que le point d'appui étant *au milieu* de cette longueur, les deux forces sont appliquées à ses deux extrémités, et qu'elles agissent dans le même sens. Il est visible que l'équilibre ne peut avoir lieu ici qu'autant que les deux forces sont *égales* : car le lévier ne pourra alors tourner dans aucun sens, tout étant égal de part et d'autre. La même chose aurait lieu, si les deux forces sans être perpendiculaires au lévier, lui étaient également inclinées : leurs momens seraient encore égaux, quoique moindres que dans le premier cas.

Si l'on prend donc un lévier physique, droit, d'une pesanteur uniforme, qui ait son point d'appui au milieu de sa longueur, et qu'on suspende à ses deux extrémités des poids *égaux*, le lévier prendra et conservera la position *horizontale*, et tout demeurera en équilibre. D'abord puisque le lévier est uniformément

pesant, et d'une épaisseur égale, son centre de gravité est au milieu de sa longueur, et par conséquent dans la verticale qui passe par le point d'appui. La pesanteur du lévier est donc détruite par la résistance de ce point; et le cas est le même que s'il était non-pesant. D'un autre côté, les poids suspendus aux deux bras du lévier, étant égaux, leur résultante passe par le même point. Donc tout doit être en repos, et demeurer en équilibre.

Quand on parle de poids égaux, on entend des poids dans lesquels l'action de la pesanteur est la même. On sait que cette force communique dans le même temps une égale vitesse à tous les corps, et à toutes les particules dont ils sont composés. Quand on dit donc que deux poids sont égaux, on entend qu'ils font l'un et l'autre un *égal effort* pour obéir à la force de la pesanteur, ce qui suppose qu'ils contiennent tous les deux le même nombre de particules matérielles, ou qu'ils ont *des masses égales.* C'est sur ce principe qu'on fait usage de cette espèce de lévier, sous le nom de *balance*, pour comparer entre elles les masses des différens corps.

6. *Avantage que ce lévier peut procurer à la puissance.*

Considérons toujours le lévier de la première espèce, et supposons que le point d'appui au lieu d'être au milieu de sa longueur, soit placé tout autre part, *au quart* par exemple, de cette longueur, de manière que le lévier soit ainsi partagé en deux bras dont l'un est *triple* de l'autre. Dans ce cas l'équilibre aura lieu,

partie de leur avantage. Si l'une de ces forces s'inclinait jusqu'au point d'agir dans le sens de la longueur du lévier, alors la perpendiculaire qui sert à mesurer la grandeur du moment de cette force, devenant nulle, il s'ensuivrait que ce moment serait pareillement nul, et que la force ainsi dirigée ne pourrait en aucune façon tenir en équilibre la force opposée : elle s'épuiserait toute entière et vainement contre le point d'appui. On considèrera donc les forces comme appliquées perpendiculairement à la longueur du lévier, à moins qu'il ne soit dit autrement.

5. *Du lévier de la première espèce.*

Soit un lévier de longueur donnée, et supposons que le point d'appui étant *au milieu* de cette longueur, les deux forces sont appliquées à ses deux extrémités, et qu'elles agissent dans le même sens. Il est visible que l'équilibre ne peut avoir lieu ici qu'autant que les deux forces sont *égales* : car le lévier ne pourra alors tourner dans aucun sens, tout étant égal de part et d'autre. La même chose aurait lieu, si les deux forces sans être perpendiculaires au lévier, lui étaient également inclinées : leurs momens seraient encore égaux, quoique moindres que dans le premier cas.

Si l'on prend donc un lévier physique, droit, d'une pesanteur uniforme, qui ait son point d'appui au milieu de sa longueur, et qu'on suspende à ses deux extrémités des poids *égaux*, le lévier prendra et conservera la position *horizontale*, et tout demeurera en équilibre. D'abord puisque le lévier est uniformément

pesant, et d'une épaisseur égale, son centre de gravité est au milieu de sa longueur, et par conséquent dans la verticale qui passe par le point d'appui. La pesanteur du lévier est donc détruite par la résistance de ce point; et le cas est le même que s'il était non-pesant. D'un autre côté, les poids suspendus aux deux bras du lévier, étant égaux, leur résultante passe par le même point. Donc tout doit être en repos, et demeurer en équilibre.

Quand on parle de poids égaux, on entend des poids dans lesquels l'action de la pesanteur est la même. On sait que cette force communique dans le même temps une égale vitesse à tous les corps, et à toutes les particules dont ils sont composés. Quand on dit donc que deux poids sont égaux, on entend qu'ils font l'un et l'autre un *égal effort* pour obéir à la force de la pesanteur, ce qui suppose qu'ils contiennent tous les deux le même nombre de particules matérielles, ou qu'ils ont *des masses égales.* C'est sur ce principe qu'on fait usage de cette espèce de lévier, sous le nom de *balance*, pour comparer entre elles les masses des différens corps.

6. *Avantage que ce lévier peut procurer à la puissance.*

Considérons toujours le lévier de la première espèce, et supposons que le point d'appui au lieu d'être au milieu de sa longueur, soit placé tout autre part, *au quart* par exemple, de cette longueur, de manière que le lévier soit ainsi partagé en deux bras dont l'un est *triple* de l'autre. Dans ce cas l'équilibre aura lieu,

si la force appliquée au bras le plus court, est *triple* de celle appliquée au bras le plus long. En général et pour des forces qui agissent perpendiculairement à la longueur du lévier, il y aura équilibre toutes les fois que ces forces seront entre elles *réciproquement* comme les bras du lévier où elles sont appliquées.

Pour vérifier notre proposition par l'expérience en employant un lévier physique et matériel, la première chose à faire, c'est d'avoir égard à l'inégale pesanteur de ses bras, lorsque le point d'appui n'est pas au milieu de sa longueur. On attachera donc au bras le plus long un cordon, qu'on fera passer sur une poulie placée au-dessus du lévier, et auquel on suspendra les poids convenables pour tenir le lévier dans une position horizontale. Par ce moyen l'excès du poids du plus long bras sur le bras le plus court étant contre-balancé, le lévier pourra être considéré comme non-pesant, puisque sa pesanteur demeure alors sans influence.

Si maintenant le point d'appui étant placé au *quart* de la longueur du lévier, on suspend au bras le plus court un poids qui soit le *triple* de celui qu'on a suspendu au bras le plus long, l'équilibre aura réellement et physiquement lieu. Ainsi au moyen de ce lévier *une once* en soutiendra *trois*; et il est visible qu'à mesure que le point d'appui s'approchera davantage de l'une des extrémités du lévier, la force appliquée à l'autre bout, deviendra capable de faire équilibre à une plus grande force. Ainsi *une once* pourra en soutenir *dix*, si elle est *dix fois* plus éloignée du point d'appui; elle en soutiendrait *cent*, si sa distance

à ce point était *cent fois* plus grande, et ainsi de suite.

Le lévier de la première espèce fournit donc un moyen facile de mettre en équilibre des forces très-inégales. Un homme en se servant d'un pareil lévier, peut soutenir, et soulever un fardeau énorme, et bien supérieur à ce que ses forces pourraient lui permettre, s'il les appliquait immédiatement à ce fardeau. C'est pour faire sentir l'immense avantage de ce lévier, qu'Archimède disait : *donnez-moi un point fixe et un lévier de suffisante longueur, et je me charge moi seul de remuer la terre et de la déplacer.* Ainsi comme l'avait aperçu clairement cet ancien et célèbre géomètre, le poids seul d'un homme pourrait faire équilibre au poids énorme du globe terrestre, en les appliquant l'un et l'autre aux extrémités d'un lévier, dans lequel le point d'appui fût d'*autant plus près* de la masse terrestre, que le poids de celle-ci est *plus grand* que le poids d'un homme. Quoique Archimède par cette proposition qu'on lui attribue, n'ait voulu que donner une idée du prodigieux avantage que le lévier procure à l'homme, on peut dire néanmoins que la chose est certaine en théorie ; et qu'il n'y a point de forces si inégales entre elles, qui ne puissent être mises en équilibre par le moyen du lévier.

L'équilibre consiste, comme on sait, dans l'égalité et l'opposition des forces : mais dans l'estimation des forces entre nécessairement la considération de la vitesse qu'elles sont capables de communiquer. Ainsi quoique dans notre lévier l'équilibre s'établisse entre des masses inégales, néanmoins il y a l'*égalité* voulue, lorsqu'on a égard, comme il le faut, *aux vitesses vir-*

tuelles. En effet, si lorsque l'équilibre est établi, on suppose que le lévier prend un petit mouvement autour de son point d'appui, on voit aussitôt que les deux extrémités de ce lévier parcourront dans le même temps des espaces, qui seront proportionnels à leur éloignement de ce point d'appui; et par conséquent la *plus petite* force prendra d'*autant plus* de vitesse; et il y aura *égalité* entre les produits de chaque masse par sa vitesse propre.

Ceci nous donne en même temps lieu d'observer, comme on l'a déjà fait, que l'on ne peut en mécanique gagner du côté de la force, qu'en perdant du côté du temps. si l'on veut soutenir un fardeau de *cent* livres avec une force de *dix* livres seulement, la chose sera facile en employant un lévier, où le point d'appui soit placé *dix fois* plus près de la résistance. Mais si l'on veut communiquer du mouvement à cette résistance; après avoir augmenté la puissance autant qu'il est nécessaire pour cela, on reconnaîtra de suite que celle-ci parcourt dans le même temps *dix fois* autant d'espace que la résistance; et par conséquent que pour élever le fardeau *d'un pouce*, il faut que le point où la puissance est appliquée, descende de *dix pouces.* Si donc celle-ci ne peut faire parcourir ces dix pouces qu'en une minute de temps, le fardeau ne sera monté d'un pouce qu'au bout d'une minute.

C'est en partant de ce principe, et en comparant la masse d'un homme à celle du globe terrestre, que quelques géomètres se sont amusés à calculer, quelle devait être la longueur du lévier au moyen duquel Archimède aurait pu tenir la terre en équilibre, et quelle vitesse il aurait été forcé de prendre pour la

déplacer d'une petite quantité. Le lévier qui est censé porter la Terre à l'une de ses extrémités, s'appuyant au point qui est le centre commun de gravité de la Terre et de la Lune, le bras au bout duquel Archimède devait agir, se serait étendu bien au-delà de notre système, et jusque parmi les étoiles fixes à une distance *quinze mille millions de millions de fois* plus grande que celle de Saturne; et en supposant qu'Archimède pût agir avec la vitesse d'un boulet de canon, il lui aurait fallu 27 *millions de millions* d'années pour déplacer la Terre d'*un pied* seulement; et pendant ce temps il aurait parcouru lui-même un espace 39 *mille millions de fois* plus grand que l'orbe de Saturne. Nous ne rapportons ici ces résultats donnés par le calcul, que pour confirmer de plus en plus le principe établi, que *les masses et les temps sont réciproquement proportionnels dans les machines.*

7. *De la charge du point d'appui dans cette espèce de lévier.*

Des masses inégales pouvant être mises en équilibre entre elles au moyen du lévier de la première espèce, il est nécessaire de savoir quelle est dans tous les cas la charge du point d'appui. Or cette charge est toujours égale à la *somme des puissances absolues* qui agissent aux extrémités du lévier: car cette somme est toujours la valeur de la résultante, lorsque les forces sont parallèles. Ainsi qu'un lévier soit chargé de deux poids égaux de *cinquante kilogrammes* chacun, ce qui suppose le point d'appui placé au milieu de sa longueur, ou qu'il ait à porter deux poids l'un de *dix kilogrammes* et

l'autre de 90, ce qui exige que le point d'appui soit au *dixième* de la longueur ; la charge de ce point d'appui est toujours la même, et égale à *cent kilogrammes.* La manière dont les poids qui se font équilibre, sont disposés sur la longueur du lévier, est dont indifférente ici ; la charge du point d'appui est toujours égale à la somme de ces poids. Il est donc nécessaire que la résistance dont l'appui est capable, soit au moins égale à cette somme.

Si les forces n'étaient pas appliquées perpendiculairement aux bras du lévier, et qu'elles ne fussent pas parallèles entre elles, alors la charge du point d'appui serait moindre que la somme des forces. On aurait la grandeur de cette charge, ainsi que sa direction, en construisant au point où les forces concourent, le parallélogramme d'usage, et menant sa diagonale. Si celle-ci n'était pas perpendiculaire au lévier, il en résulterait deux efforts, l'un qui presserait le lévier contre l'appui, et qui en mesurerait la charge, et l'autre qui tendrait à l'entraîner dans le sens de sa longueur, et qui devrait être détruite par une force contraire.

Expériences. On prouve en physique la vérité de ce qu'on vient de dire sur la charge du point d'appui, par les expériences suivantes. On a un petit lévier mobile (fig. 54), et qui n'est appuyé nulle part. A ses deux extrémités sont attachés des cordons qu'on fait passer sur des poulies fort mobiles, et auxquels on suspend des poids égaux. Ce petit lévier étant donc dans une position horizontale, ces poids font effort pour l'enlever, et le faire mouvoir de bas en haut. Pour s'opposer à ce mouvement, et maintenir les

choses en équilibre, on suspend au milieu du lévier un poids *égal aux deux poids* qui le sollicitent, et tout alors demeure en repos.

Il n'y a pas ici à proprement parler, de point d'appui, mais bien une puissance qui en tient lieu, et qui en remplit les fonctions. Le poids appliqué au milieu du lévier, et dont l'action se fait sentir de haut en bas, équivaut à un obstacle qui serait placé au-dessus du lévier, justement au milieu de sa longueur, et qui l'empêcherait d'obéir anx deux forces qui tendent à le faire monter. Ce poids qui suffit pour annuler leurs efforts, et les tenir en équilibre, nous donne donc la mesure de la résistance qu'un obstacle ainsi placé opposerait, ou de l'effort qu'il aurait à supporter, effort qui se trouve égal, comme on voit, à la somme des forces qui sont appliquées aux deux extrémités du lévier.

Au reste pour que l'équilibre ait lieu ici, il est nécessaire que la direction des cordons qui tirent le lévier de bas en haut, soit bien perpendiculaire à la longueur de ce lévier. S'ils lui sont inclinés de quelque manière que ce soit, le poids du milieu l'emportera, et le lévier descendra : ce qui fait voir que la charge du point d'appui est alors moindre que la somme des deux forces extrêmes.

Pour prouver encore mieux la proposition dont il est ici question, on ajoute l'expérience suivante. Au milieu du premier lévier, et à angle droit (fig. 55), on en place un second tout semblable à l'autre, et qui repose sur celui-ci par le *quart* de sa longueur. En employant des poids convenables, on met d'abord le tout en équilibre de manière que les léviers soient

tenus dans une position horizontale, et que leur pesanteur propre soit annulée. Ensuite suspendant un poids d'*une once* au bras le plus long du second lévier, et un poids de *trois onces* au bras le plus court, on attache *deux onces* de chaque côté aux cordons du premier lévier, et tout se trouve encore en équilibre.

Ici l'on voit d'abord deux forces égales de *deux onces* chacune, qui agissent dans le même sens, et tendent à faire monter le système des deux léviers. Il faudrait donc un poids de *quatre onces* appliqué au milieu du premier lévier, pour s'opposer à ce mouvement, et contre-balancer cet effort. Mais l'on obtient le même résultat par le moyen des dispositions indiquées. Les *quatre onces* au lieu d'être réunies au point du milieu, ont été placées, *une once* d'un côté, et *trois onces* de l'autre à des distances de ce point *réciproquement* proportionnelles ; et puisque l'équilibre a également lieu par cet arrangement, il suit que l'effort de ces *quatre* onces est le même, que si elles étaient appliquées au point du premier lévier sur lequel repose le second. La charge du point d'appui est donc la même, soit que les poids soient *égaux* et placés à *égales* distances de ce point, soit qu'ils soient *inégaux*, et placés à d'*inégales* distances.

8. *Du cas où le lévier est appuyé par ses deux extrémités.*

Dans nos expériences le point d'appui a été remplacé par une force telle qu'il convenait pour l'équilibre ; et en effet ce point fixe remplit les fonctions d'une force *égale et opposée* à la résultante des deux qui agissent

aux extrémités du lévier. Mais il y a plus : les deux forces elles-mêmes pourraient être remplacées par deux appuis, tandis qu'une force unique agirait sur quelque point de la longueur du lévier. Dans ce cas la force étant donnée, ainsi que son point d'application, il sera facile de déterminer quelle est la charge que supporte chacun des appuis.

Si la force est appliquée au milieu de la longueur du lévier, les appuis en porteront évidemment la *moitié* chacun. Ainsi deux hommes qui soutiennent un poids de *cent* livres suspendu au milieu d'une barre, qu'ils tiennent par les deux bouts, portent chacun un poids de *cinquante* livres. Une poutre d'égale épaisseur qui repose horizontalement par ses extrémités sur deux murs parallèles, est soutenue *également* par l'un et par l'autre. On peut considérer son poids comme réuni à son centre de gravité qui est au milieu de sa longueur, et ce cas se trouve alors le même que le précédent.

Si le fardeau au lieu d'être attaché au milieu du lévier, était appliqué en tout autre endroit de sa longueur, au *quart* par exemple, alors l'homme qui en serait le plus près, en soutiendrait la plus grande partie, les *trois quarts* dans l'hypothèse présente; tandis que l'autre n'en aurait à soutenir que la moindre partie, *le quart* dans la même supposition. L'on pourra donc en partant de là, disposer un fardeau, de manière que deux hommes de forces inégales qui seraient obligés de le soutenir, en portassent chacun une portion proportionnelle à sa force.

9. *Equilibre entre plusieurs forces appliquées au même lévier.*

Au lieu de deux forces appliquées aux extrémités du lévier, il pourrait y en avoir plusieurs distribuées en différens points de sa longueur, et les conditions de l'équilibre se trouveraient encore facilement. Il suffit pour cela que *la somme des momens des forces placées d'un même côté par rapport au point d'appui, et que nous supposons agir dans le même sens, soit égale à la somme des momens de celles qui sont situées de l'autre côté.* Si les forces agissaient dans des sens opposés, il faudrait en général que *la somme des momens de toutes les forces qui tendent à faire tourner le lévier dans un sens, fût égal à la somme des momens de celles qui tendent à le faire tourner en sens contraire.*

Soit donc un lévier AB (fig. 56) dont le point d'appui est en C au *quart* de sa longueur, et qui est chargé aux points D, E, B de poids égaux d'*une once* chacun : on demande quelle doit être la grandeur du poids appliqué en A, pour faire équilibre à ceux-là. Les distances CD, DE, EB étant supposées égales entre elles, et au bras AC, que je considère comme l'*unité*, j'ajoute ensemble les trois distances CB, CE, CD, ou les nombres 1, 2, 3: ce qui me donne 6 pour la somme des momens des poids donnés. Ce nombre exprime donc aussi le moment de la force qui doit être appliquée en A ; et puisque sa distance AC a été faite égale à l'*unité*, il faudra donc suspendre en A un poids de *six onces*, pour tenir en équilibre les *trois onces* placées de l'autre côté.

On n'a eu ici aucun égard au poids du lévier lui-même. Si l'on voulait en tenir compte, le lévier étant supposé uniformément pesant, l'on considèrerait le poids de chaque bras comme concentré dans son milieu. Ainsi le poids de BC *triple* du poids de AC se trouverait encore à une distance *triple* du point d'appui, et aurait par conséquent un moment *neuf fois* aussi grand. Pour tenir donc le lévier en équilibre, il faudrait appliquer au milieu de AC, un poids égal à *huit fois* le poids de ce bras AC, ou à *deux fois* le poids du lévier AB tout entier; ou enfin suspendre en A un poids qui fût égal à celui de AB.

Comme on a trouvé le poids unique qui peut faire équilibre à des poids donnés, lorsque les points d'application sont déterminés, l'on peut aussi trouver quels sont les poids nécessaires pour contre-balancer une résistance donnée, et à quelles distances du point d'appui ils doivent être placés.

Puisque le moment d'une force devient plus grand à proportion qu'elle s'éloigne davantage du point d'appui, il suit qu'un même poids pourra faire équilibre successivement à des masses très-inégales, en faisant varier sa distance à ce point d'appui. C'est sur ce principe qu'est fondée la construction d'une sorte de balance très-usitée, dont il sera bientôt question.

10. *Du lévier de la seconde espèce.*

Le lévier de la seconde espèce est celui, où la résistance est placée entre la puissance et le point d'appui: celui-ci se trouve donc à une des extrémités du lévier, tandis que la puissance agit à l'autre extrémité. Les

deux forces que ce lévier sert à mettre en équilibre, étant placées du même côté par rapport au point fixe, il est nécessaire que ces forces qui doivent se combattre, agissent en sens contraire. Si donc la résistance est un fardeau à soutenir, il faut que la puissance agisse de bas en haut ; ce qui ne peut se faire si elle-même est un poids, qu'au moyen d'un cordon passant sur une poulie fixe, que l'on appelle dans ce cas *poulie de renvoi*, parce qu'elle sert à changer la direction de la force, sans rien changer aux conditions de l'équilibre.

La puissance dans l'espèce de lévier que nous considérons ici, étant toujours plus éloignée du point d'appui que la résistance, il suit que la masse de celle-là est toujours plus petite que la masse de la dernière, et d'autant plus qu'il y a plus d'inégalités dans leurs distances au point fixe. Mais aussi la vitesse virtuelle de la première est proportionnellement plus grande, et il y a encore égalité dans les produits des masses par leurs vitesses respectives. Si donc en employant le lévier de la seconde espèce on gagne nécessairement du côté de la force, on perd aussi et de même du côté du temps.

Soit donc le lévier CB (fig. 57) de la seconde espèce, ayant son point d'appui en C. Si en A, au cinquième de sa longueur, on suspend un poids de *cinq onces*, il ne faudra à l'extrémite B qu'une force d'*une once* pour établir l'équilibre. Mais s'il faut élever d'*un pouce* ce poids de *cinq onces*, le contre-poids d'*une once* sera forcé de descendre de *cinq pouces*. On suppose que les forces agissent perpendiculairement à la longueur du lévier. Si cela n'était pas, ce ne serait plus aux bras du lévier qu'il faudrait avoir égard, mais aux perpendiculaires abaissées du point C sur les directions des forces.

Quant à la charge du point d'appui, elle est ici égale *à la différence des masses en équilibre, et elle se fait sentir dans le sens de la plus grande des deux.* Puisque les forces agissent ici en sens contraires, leur résultante est simplement égale à leur différence, et comme on sait, l'effort qui se fait sur le point d'appui, est toujours égal à cette résultante. Le point C dans notre exemple, est donc pressé de haut en bas avec une force de *quatre onces* seulement: l'on pourrait y appliquer une force de cette valeur, et agissant de bas en haut, et l'équilibre aurait également lieu. La charge des points d'appui est donc moindre dans le lévier du second genre, qu'elle n'est dans celui du premier, parce que les forces agissent dans l'un en sens contraire, et en même sens dans l'autre.

11. *Usage de cette espèce de lévier.*

On se sert souvent du lévier de la seconde espèce pour remuer de lourds fardeaux. Soit par exemple le bloc de pierre M (fig. 58) que l'on veut tenir sur son arête NP, au moyen du lévier BC appuyé contre le terrein en C. On demande quelle doit être la grandeur de la puissance appliquée perpendiculairement au point B, pour produire l'effet désiré. D'abord il est visible que le bloc étant appuyé sur le sol par son arête NP, il n'y a qu'une partie de son poids qui presse le lévier en A, et qui soit à soutenir par la puissance qui agit en B. G étant le centre de gravité de la masse M, on peut supposer que tout son poids est réuni en ce point, et que la résistance à vaincre agit par conséquent dans le sens de la verticale GK. Par les points A et K

pris sur la face inférieure du bloc, on mènera une droite, qui rencontre en I l'arête NP ; et alors on considèrera le fardeau M, comme appliqué en K sur le lévier IA, et on le distribuera sur les deux appuis I et A en parties *réciproquement proportionnelles* aux distances AK et IK. On saura ainsi quelle est la partie de ce fardeau qui pèse sur le sol, et quelle est celle qui presse le lévier en A. Cette dernière portion est toujours égale *à la masse M diminuée dans le rapport de IA à IK*. De façon que si IK est le quart par exemple, de IA, la charge du point A ne sera que le quart du fardeau.

A mesure que le centre de gravité G s'élève davantage en tournant autour de l'arête NP, la verticale GK rencontre AI en des points de plus en plus voisins du point I. Il suit de là que la charge du point A devient toujours moindre, jusque-là qu'elle serait nulle, si le centre G parvenait à être verticalement au-dessus de NP. Au contraire lorsque le point G s'abaisse, la rencontre de la verticale GK avec IA s'éloigne de plus en plus du point d'appui I, et la charge en A augmente, jusqu'à devenir à peu près égale à la moitié de M : ce qui arrive lorsque la droite IA est tout près de la position horizontale, où elle est partagée en deux également par la verticale GK.

Maintenant l'effort qui se fait en A et que nous venons de déterminer, se fait sentir suivant la verticale AH. Il faut donc le *décomposer* en deux, l'un AL perpendiculaire à la longueur du lévier, et qui sera la vraie charge à soutenir, et l'autre LH parallèle à cette longueur, et qui ne peut servir à augmenter cette charge. Celui-ci tend seulement à faire glisser le fardeau le long du lévier, et l'entraînerait en effet dans ce

sens, s'il n'était détruit par la résistance du frottement. Cet effort se transmet donc en C, et n'ajoute rien à la charge du lévier. Reste donc la force perpendiculaire AL: l'on trouvera facilement que cette force *est égale à AH diminué dans le rapport de AH à AL*, ou *multiplié par le sinus de l'angle AHL*. Or cet angle est celui que la direction du lévier fait avec la verticale. Ainsi l'angle et son sinus diminuant à mesure que le lévier approche de cette dernière position, il suit que la puissance a encore un moindre effort à faire, à mesure que le bloc s'élève davantage sur son arête NP.

Enfin dans le lévier de la seconde espèce BC, la puissance *devant être* à la résistance, *comme* AC *est à* BC, il sera facile de déterminer l'effort qu'il faut faire au point B pour tenir en équilibre une masse connue, lorsque la longueur du lévier, son inclinaison et la position du point A seront données. Supposons par exemple, que BC est de *cinq* pieds, que A est à *un* pied de l'extrémité C, et que l'angle avec l'horizon soit *de* 45 *degrés*, ce qui donne la même grandeur pour l'angle du lévier avec la verticale; si d'ailleurs le point K répond *au tiers* de AI; on aura la puissance égale *à la quinzième partie de la masse*, *multipliée par le sinus de* 45 *degrés*. Ainsi avec une force de 47 livres, on pourra tenir en équilibre dans les circonstances supposées, une masse pesant *mille livres*.

13. *Du lévier du troisième genre.*

Pour avoir le lévier du troisième genre il suffit de considérer comme puissance ce que nous avons appelé résistance dans celui de la seconde espèce, et de placer la véritable résistance à l'une des extrémités du lévier,

tandis que le point d'appui est toujours à l'autre extrémité. On doit voir clairement par cette disposition des forces, que dans cette espèce de lévier, il est toujours nécessaire pour l'équilibre, que la masse de la puissance soit supérieure à celle de la résistance. Pour soutenir le poids d'*une livre* par exemple, il faudra employer une force de *deux*, *trois* ou *quatre livres*, selon qu'on appliquera celle-ci *à la moitié*, *au tiers* ou *au quart* de la longueur du lévier, à compter du point d'appui.

Le lévier dont il est ici question, nuit donc nécessairement à la puissance, et ne peut être employé avec avantage, lorsqu'il s'agit simplement d'établir l'équilibre. Mais s'il est besoin de communiquer du mouvement, l'on peut alors en tirer une grande utilité, et l'on ne craindra pas d'assurer qu'il est à cet égard beaucoup plus avantageux que les deux autres espèces de lévier. En effet si l'on suppose que l'équilibre est rompu pour un moment, le mouvement sera évidemment plus grand à l'extrémité du lévier, où est attachée la résistance, qu'au point moins éloigné de l'appui, où la puissance est appliquée. Si donc la masse de celle-ci est *plus grande*, sa vitesse sera aussi d'*autant moindre*; et si l'on a beaucoup de force à sa disposition, et que l'on veuille ménager le temps en communiquant beaucoup de vitesse, c'est du lévier de la troisième espèce qu'il faut faire usage.

C'est aussi ce qu'a fait la nature dans la manière dont elle a constitué les membres des animaux, et dans les moyens qu'elle a établis pour les faire mouvoir. Notre bras par exemple, se trouve organisé comme un lévier du troisième genre. Lorsqu'il est tendu en avant, et renversé dans une position horizontale, ce qui le main-

tient dans cette position, c'est l'action d'un muscle DE (fig. 59) qui part de la partie supérieure du bras AC, et vient s'attacher à l'os de l'avant-bras BC, tout près du coude C, qui est le point sur lequel cet avant-bras doit tourner. Ce mouvement de rotation s'exécute par la contraction ou le relâchement du muscle DE que l'on appelle le *deltoïde.*

Quand nous avons le bras tendu en avant, comme le représente la figure, le poids de l'avant-bras étant supposé réuni à son centre de gravité G, l'effort que fait en E le deltoïde pour le soutenir en cet état *est au poids* de cet avant-bras, *comme* CG *est à* CE ; de sorte que si cette dernière distance n'est que la *dixième* partie de l'autre, l'effort au point E sera *dix fois* aussi grand que le poids qu'il faut vaincre. Il se fait donc ici une dépense de force bien supérieure à l'effet qu'il s'agit de produire, lorsque l'on ne considère que l'équilibre ; et l'on pourrait croire d'abord qu'il y a eu ou prodigalité, ou imprudence de la part de la nature dans une pareille disposition : mais un peu d'attention nous y fera découvrir au contraire une admirable sagesse.

Ce n'est pas l'équilibre que la nature a eu en vue, mais bien le mouvement. Nous avons besoin à chaque instant de plier et de déployer le bras. Un petit changement dans la longueur du muscle DE, va produire au point G un mouvement *dix fois* plus grand, et l'ordre de la volonté sera exécuté avec une étonnante promptitude : ce qui était nécessaire vu la brièveté de notre existence, vu surtout le grand nombre de dangers qui menacent notre vie, et qu'il fallait pouvoir repousser avec célérité avant qu'ils nous eussent atteints.

La distance du point où le muscle deltoïde est atta-

ché, au point sur lequel se fait le mouvement de l'avant-bras, *est à* la longueur de cet avant-bras et de la main reunis, *comme* 3 *est à* 100. Ainsi pour soutenir un poids de *trente livres* suspendu au bout des doigts, le bras étant renversé et tendu horizontalement, il en coûte à la puissance un effort de *mille livres*. Il ne faut donc pas être surpris si nous éprouvons tant de difficulté à soutenir de cette manière des poids médiocres.

14. *Usage des léviers de tous genres.*

Les léviers de toutes les espèces se rencontrent fréquemment parmi les outils ou machines dont nous faisons continuellement usage. Nous ferons bientôt connaître plus particulièrement quelques-unes de ces machines. Pour le moment nous nous contenterons de faire remarquer, 1.° que les *pinces* ou *badines* dont on se sert pour remuer les tisons, sont des léviers de la troisième espèce. Le point d'appui est à l'endroit où se joignent les deux branches : la puissance ce sont les doigts qui pressent sur ces deux branches pour les rapprocher entre elles ; et la résistance c'est le tison qu'il s'agit de soulever. L'effort à faire est ici d'autant plus grand, que la main est placée plus près du point d'appui : cet effort diminue à mesure qu'elle s'approche du fardeau à remuer.

2.° Le couteau du boulanger est un lévier du second genre. Il est fixé, comme on sait, par son extrémité. Le pain qu'il s'agit de couper, et qui remplit ici les fonctions de la résistance, est placé sous le tranchant ; et la main qui tient le manche, et qui est la puissance, est appliquée à l'autre extrémité.

3.° Les ciseaux à couper sont des léviers de la première espèce assemblés par paires. Le point d'appui qui est le clou qui les attache l'un à l'autre, est placé entre les doigts qui sont la puissance, et le corps qu'on veut couper qui est la résistance. Selon que le point de jonction de ces léviers est plus près de l'une ou de l'autre, les ciseaux sont propres à couper des corps plus ou moins durs, et leurs pointes font plus ou moins de mouvement.

On peut aussi considérer les rames du batelier comme des léviers du deuxième genre. C'est ici l'eau qui fournit le point d'appui : la résistance c'est le bateau à mouvoir, et le bras du batelier est la puissance. Il en est de même des mâts de navires, où l'on voit l'impulsion du vent, la masse à pousser, et le point d'appui disposés dans le même ordre. Au reste, les trois espèces de lévier n'en font réellement qu'une seule, quand il s'agit d'équilibre. En effet, lorsque trois forces se contre-balancent mutuellement, rien n'empêche de considérer l'une quelconque d'elles, comme étant fixe, et servant par conséquent d'appui au système.

Nous n'avons considéré que des léviers droits : mais les conditions de l'équilibre sont les mêmes pour les léviers courbés ou coudés comme on voudra. Si donc on a un lévier angulaire ACB (fig. 60) dont le point d'appui est en C, les forces appliquées perpendiculairement en A et B, devront pour l'équilibre, être entre elles *comme* BC et AC. Si leurs directions n'étaient pas perpendiculaires aux bras du lévier, il faudrait du point d'appui C abaisser des perpendiculaires sur ces directions, et les substituer aux bras

correspondans. C'est en général de cette manière qu'on trouve le rapport des forces qui se tiennent en équilibre au moyen d'un lévier de forme quelconque. Ainsi dans la manivelle courbe, on n'a aucun égard à la courbure ; et l'on ne tient compte que de la distance directe de la main au centre du mouvement : c'est cette distance qui est la longueur du lévier.

CHAPITRE VI.

DU LÉVIER COMPOSÉ.

L'AVANTAGE que la puissance obtient avec un seul lévier du premier genre, elle peut l'obtenir de même par la combinaison de plusieurs léviers, qui agissent les uns sur les autres, et qui ont chacun leur point d'appui particulier. Soient en effet trois léviers AB, B'D, D'E (fig. 61.) disposés comme on le voit ici, le lévier du milieu reposant par ses deux extrémités sur les extrémités B et D' du premier et du dernier lévier, et les points d'appui de ces trois léviers étant en *a*, *b* et *d*. Si l'on conçoit qu'un poids d'*une once* est suspendu en E au premier lévier, et que *d*E soit le *quintuple* de *d*D', *une once* en E fera équilibre à *cinq onces* appliquées en D' ; et l'extrémité D du lévier moyen sera poussée de bas en haut avec une force équivalente à *cinq onces*. Mais si *b*D est supposé *six fois*

aussi grand que *b*B′, cet effort de *cinq onces* qui se fait sentir au point D, vaudra *six fois* autant, ou *trente onces* en B′. L'extrémité B du troisième lévier est donc pressée de haut en bas par une force de *trente onces*, qui en vaudra *cent vingt* en A, si l'on fait *a*B égal au *quadruple* de *a*A. Un poids de *cent vingt onces* placé en A, sera donc tenu en équilibre par *une seule once* placée en E, au moyen de trois léviers combinés comme on vient de dire.

On pourrait obtenir le même résultat par le moyen d'un seul lévier : mais il faudrait pour cela que l'un des bras de ce lévier fût *cent vingt fois* plus long que l'autre. Ici la longueur totale se trouve considérablement réduite. Notre lévier composé, si l'on fait *a*A égal à *un pouce*, n'aura en tout que *dix-huit pouces* de longueur, au lieu qu'il en aurait *cent vingt-un* s'il était simple. Ce qui procure l'avantage de diminuer ainsi la longueur du lévier, ce sont les trois points d'appui *a*, *b*, *d*, qui forment autant de centres de mouvement, lorsque l'équilibre vient à être rompu.

Au reste, il ne faut pas croire que cette combinaison puisse dispenser la puissance de prendre toute la vitesse qui résulte de l'équilibre. Il est facile de voir que la résistance étant supposée parcourir un arc d'*un pouce*, la puissance est forcée de décrire dans le même temps un arc de *cent vingt pouces*. En effet si l'extrémité A descend d'*un pouce*, B et B′ monteront de *quatre pouces*, D et D′ en décriront *vingt-quatre* de haut en bas, et le point E sera forcé d'en parcourir *cent vingt* de bas en haut. Ainsi les vitesses virtuelles sont encore ici *réciproquement* comme les masses : ce qui constitue l'équilibre.

En général lorsque des léviers agissent ainsi les uns sur les autres, on a toujours, abstraction faite de leur pesanteur propre : la puissance *est à* la résistance, *comme* le produit de tous les bras de lévier qui sont du côté de la résistance *est au* produit de tous les bras placés du côté de la puissance. Si l'on voulait avoir égard à la pesanteur propre des léviers, il faudrait encore considérer le poids de chaque bras comme réuni à son centre de gravité, et en tenir compte comme d'un poids étranger appliqué à ce point.

1. *Balance dite de Sanctorius.*

On a un exemple remarquable de cette combinaison de léviers dans l'appareil que l'on nomme *balance de Sanctorius*, et dont voici la description. Au fond d'une boîte quarrée ABCD (fig. 62) sont placés horizontalement deux doubles léviers EFG, E'F'G', qui ont leurs points d'appui à leurs extrémités E, G, E', G'. A peu de distance de ces extrémités, et dans la face supérieure des léviers, sont fixées quatre pointes sur lesquelles l'action du corps à peser doit se faire sentir. Les points F et F' où les léviers d'un même côté se réunissent, reposent sur un troisième lévier OI, qui occupe le milieu de la boîte. Celui-ci a aussi son point d'appui à l'extrémité O, et par l'autre extrémité I il tient à une petite tringle verticale, qui est elle-même attachée à un lévier du premier genre, élevé d'un mètre environ au-dessus de la boîte. Enfin cette boîte se couvre avec une tablette garnie à ses angles de quatre pivots, où doivent entrer les pointes dont on a parlé, et c'est sur cette tablette que l'on pose les

corps dont on veut connaître le poids. Ce poids se connaît par le moyen de ceux qu'il faut, pour l'équilibre, mettre dans le bassin suspendu au lévier supérieur.

Par la description qu'on vient de donner de cette espèce de balance, on voit aisément qu'un poids très-considérable doit être tenu en équilibre par un poids beaucoup moindre; le poids d'un homme par exemple, par un poids de quelques livres au plus. En effet supposons que dans les léviers EF, etc., les points sur lesquels agit le fardeau, soient placés *au cinquième* de leur longueur, le poids d'un homme que j'estime de *soixante et quinze kilogrammes*, ne fera en F et F′ qu'un effort de *quinze kilogrammes ;* et si OF *est* encore à OI *comme* un *est à* cinq, les *quinze kilogrammes* en F n'en vaudront plus que *trois* en I, ou plutôt en A. Le bras le plus court du lévier supérieur n'étant donc sollicité que par cette force de *trois kilogrammes*, *un kilogramme et demi* attaché au bras le plus long, que je suppose le *double* de l'autre, suffira donc pour l'équilibre.

On croirait d'abord que cette quantité doit encore être réduite *au quart*, par la raison que le poids est supporté en même temps par les quatre premiers léviers : mais l'action de ceux-ci se transmettant au seul lévier OI, l'effet produit sur ce dernier est évidemment le même, que s'il n'y avait eu qu'un seul premier lévier, et par conséquent la condition de l'équilibre est indépendante de la considération du nombre des léviers qui supportent immédiatement le fardeau.

Dans l'exemple cité, *un* est équivalent à *cinquante.* On peut faire d'autres combinaisons plus ou moins

avantageuses à la puissance : mais l'on conçoit que tous ces avantages sont aux dépens de la justesse ; et que ces sortes de balances ne doivent être employées que lorsqu'on n'a pas besoin de beaucoup d'exactitude. Celle-ci porte le nom de *Sanctorius*, médecin du 16.[e] siècle, qui s'en servait, dit-on, pour se peser journellement, et reconnaître ainsi ce que son corps perdait en *vingt-quatre heures* des alimens qu'il avait pris, par l'effet de la transpiration insensible. On se sert aujourd'hui d'un appareil de ce genre, pour peser les voitures chargées. Voyez la Note (*g*).

2. *Balance de Roberval.*

On appelle balance de *Roberval* du nom de l'inventeur, un appareil au moyen duquel des poids *égaux* placés à des distances en apparence *inégales* du point d'appui, sont néanmoins en équilibre entre eux. Cet appareil (fig. 63) est composé de deux léviers parallèles et égaux, unis l'un à l'autre par deux tringles verticales, qui sont aussi parallèles et égales. Ces deux léviers peuvent tourner ensemble sur deux axes qui les traversent par leur milieu : mais les tringles qui les unissent demeurent toujours verticales dans toutes les positions que peuvent prendre les léviers. Au milieu de ces tringles sont fixées deux traverses horizontales, auxquelles on peut accrocher différens poids.

Maintenant si l'on suspend aux traverses dont on vient de parler, et en des points correspondans pris hors du parallélogramme formé par les deux léviers et les deux tringles ; si l'on suspend, dis-je, des poids égaux, l'équilibre aura lieu, et les léviers conserveront leur position horizontale. La chose dans ce cas n'a rien

de surprenant, puisqu'il y a égalité dans les masses, et dans les distances au point d'appui. Mais l'effet sera encore le même, et l'équilibre subsistera, si de ces deux poids égaux l'un est placé en dehors, et l'autre en dedans du parallélogramme, quoique alors les distances de ces poids à l'axe du mouvement, paraissent bien différentes. Mais cette différence n'a rien de réel, comme on le reconnaîtra par l'explication suivante.

Les poids suspendus aux traverses horizontales, tendent à faire courber les bras où ils sont attachés ; et si ces bras étaient parfaitement flexibles, ils descendraient en effet jusqu'à ce qu'ils fussent venus se placer au-dessous du point où la traverse est fixée. Si celle-ci est inflexible, comme on l'a supposé, les poids ne tendent pas moins à venir se placer sous ces points, et leur action sur le lévier est la même que s'ils y étaient véritablement attachés. Donc leurs distances au point d'appui, ou à l'axe du mouvement, sont toujours égales entre elles : quelque part qu'on les suspende aux traverses horizontales, c'est toujours comme s'ils étaient attachés aux extrémités du lévier supérieur. Donc s'ils sont égaux, ils doivent se faire équilibre dans toutes les positions.

CHAPITRE VII.

DE LA BALANCE, DE LA ROMAINE, etc.

LA balance ordinaire (fig. 64) est un lévier du premier genre, qui a son point d'appui au milieu de sa longueur, et qui sert par conséquent à mettre en équilibre des poids égaux. Pour rendre ce lévier d'un usage plus commode, on suspend à ses deux extrémités deux bassins d'égal poids, dans lesquels on met d'une part le corps que l'on veut peser, et de l'autre celui qui doit servir de contre-poids.

Peser un corps c'est le comparer à un autre corps dont la masse est considérée comme *unité de poids*, pour savoir combien la masse du premier contient de ces unités. Ainsi quand on dit qu'un corps pèse *cinq livres* par exemple, on veut dire que la masse de ce corps est *cinq fois* aussi grande qu'une autre masse connue, à laquelle on a donné le nom de *livre*. On met donc dans un des bassins *cinq* poids d'*une livre* chacun, et l'on met le corps en question dans l'autre bassin. D'après la construction de la balance il doit y avoir équilibre, si le corps donné pèse en effet *cinq livres*.

On connaît que l'équilibre a lieu dans la balance, lorsque le lévier, qui s'appelle le *fléau* de la balance, se tient dans une position horizontale. Pour mieux

juger de cette position, et de la justesse de l'équilibre, le fléau porte par-dessus et à son milieu, une aiguille déliée, qui lui est perpendiculaire, et qui doit se trouver verticale, et renfermée exactement dans la *chasse* qui sert à suspendre la balance, lorsque le fléau est bien horizontal.

1. *Conditions pour une bonne balance.*

Plusieurs conditions sont requises pour constituer une balance exacte et fidelle. D'abord il faut que les bras de la balance soient précisément d'une égale longueur, et d'un égal poids. On connaît par la mesure si la première condition est remplie, et par la position horizontale du fléau *à vide*, si la seconde a lieu. La moindre différence de longueur dans les bras du lévier, rend la balance infidelle : car alors il est faux de dire que les poids qu'elle met en équilibre soient égaux entre eux. Le fléau suspendu à vide pourrait bien déguiser cette imperfection : il suffirait pour cela que le bras le plus court fût aussi le plus pesant à proportion, de façon que ce fléau prît de lui-même la position horizontale.

Un moyen sûr de reconnaître s'il y a quelque inégalité de longueur dans les deux bras du fléau, c'est, après avoir mis deux corps en équilibre par son moyen, de transposer ces deux corps dans les bassins opposés. Il est évident que l'équilibre aura encore lieu, si les longueurs des bras sont parfaitement égales ; et qu'il ne saurait subsiter, s'il y a entre elles quelque différence. Dans cette dernière hypothèse, les masses en équilibre n'étaient point égales : celle attachée au bras le plus court, était la plus grande des deux ; transportée au bout

du bras le plus long, elle doit doublement l'emporter sur l'autre, puisqu'elle est plus pesante et placée plus loin du point d'appui. Le défaut d'équilibre dans la seconde position des corps, prouve donc incontestablement que les deux bras de la balance sont de longueurs inégales, et par conséquent que cet instrument pour l'usage ordinaire, ne peut qu'induire en erreur.

Mais l'on peut encore avec une balance qui aurait le défaut dont on vient de parler, trouver le véritable poids d'un corps, sans avoir besoin de connaître la différence des deux bras du fléau. On pèse successivement le corps dans les deux bassins, et l'on obtient deux résultats différens : mais l'équilibre ayant été établi à chaque fois, la masse du corps *multipliée* par le bras où il est suspendu, s'est toujours trouvée égale à la la masse du contre-poids *multipliée* par le bras qui était de son côté. Comme chaque bras du fléau a appartenu tour-à-tour au corps et à son contre-poids, en *multipliant* entre elles ces deux *égalités*, les longueurs des bras du lévier qui sont employées de même de part et d'autre, se suppriment, et l'on trouve que *le quarré de la masse cherchée est égal au produit des deux contre-poids multipliés entre eux.* Donc cette masse est égale *à la racine quarrée de ce produit.* Si le corps dans un bassin pesait *huit onces*, et dans l'autre bassin *sept onces* seulement, son véritable poids serait *de sept onces et 48 centièmes.* (1)

---

(1) Soit M la masse à peser, P son poids dans un bassin, et P′ son poids dans l'autre, B l'un des bras de la balance, et B′ l'autre bras. Les deux équilibres donnent $MB = PB'$ et $MB' = P'B$. D'où l'on tire par la multiplication $M^2BB' = PP'BB'$, ou $M^2 = PP'$, ou enfin $M = \sqrt{PP'}$.

Voici une autre manière de peser avec beaucoup de justesse en faisant usage d'une balance quelconque. On met dans un des bassins le corps que l'on veut peser, et l'on charge l'autre bassin de poids quelconques, jusqu'à ce qu'on obtienne un parfait équilibre. On ôte ensuite le corps donné, et l'on met à sa place dans le même bassin tous les poids *connus* qui sont nécessaires pour ramener l'équilibre. Ces poids, comme il est évident, représenteront le vrai poids du corps qu'on voulait peser. C'est là le procédé qu'il faut employer, lorsqu'on a besoin d'une très-grande précision, comme dans l'essai des mines et des métaux.

Après la justesse ce qu'on recherche dans une balance, c'est la *sensibilité :* on veut qu'étant chargée des poids convenables, une petite différence dans ces poid suffise pour la faire *trébucher.* Pour donner cette qualité à une balance, on fait reposer son axe sur l'arête vive d'un prisme triangulaire auquel on donne le nom de *couteau.* Le frottement est ainsi diminué autant qu'il est possible, et la balance jouit de toute la mobilité qu'on peut désirer. Pour empêcher que l'axe de la balance ne puisse se déplacer sur son support, cet axe est reçu dans deux œillets de forme ovale, dans lesquels il peut s'incliner d'un côté ou de l'autre, mais sans pouvoir du tout changer de place. Cependant le fléau en s'inclinant, s'appuye sur d'autres points du *couteau*, quoique celui-ci soit assez aigu ; ce qui fait que dans les petites différences de poids, le fléau s'arrête dans une certaine inclinaison, sans se renverser tout-à-fait.

Il est à observer ici qu'il ne faut jamais *surcharger* une balance : car outre le danger d'*émousser* le couteau, ce qui le mettrait hors de service, il pourrait encore

arriver que les bras du fléau pliassent sous la charge, et qu'ils se courbassent inégalement, ce qui rendrait la balance fausse et trompeuse. Il est donc nécessaire d'avoir des balances différentes suivant les divers usages qu'on veut en faire. La sensibilité d'une balance est toujours dépendante de la charge qu'elle porte dans le moment. Une balance qui doit trébucher par la différence d'*un grain*, ne doit porter qu'une charge de *quelques onces* au plus. Si on lui fait porter plusieurs *livres*, on la surcharge alors, et elle exigera pour tomber un surcroît beaucoup plus considérable par la raison que le frottement est plus grand, et qu'il faut aussi plus d'effort pour déplacer le centre de gravité commun.

La position du centre de gravité du fléau n'est point une chose indifférente lorsqu'il s'agit de la sensibilité d'une balance. Si ce point se trouve dans l'axe même, et que le fléau soit seul et non chargé d'aucun poids étranger, ce fléau se tiendra en équilibre dans toutes les positions qu'on voudra lui faire prendre. L'on pourra même reconnaître par ce moyen, si le centre de figure est bien le même que le centre de gravité, et par conséquent si les bras du fléau sont bien exactement de même longueur et d'égal poids. L'équilibre aurait encore lieu dans toutes les positions, lors même que les bras du fléau seraient chargés de poids égaux; parce que les tringles qui soutiennent les bassins demeurant verticales et parallèles, le centre de gravité commun, quoique descendu plus bas, se trouverait toujours dans la verticale menée par le point d'appui. Mais il arriverait aussi que s'il y avait quelque inégalité dans les poids, leur résultante ne passant plus par les points de suspension, le fléau se renverserait sur-le-champ

tout-à-fait, et que les tâtonnemens pour trouver l'équilibre seraient longs et pénibles. Pour éviter cet inconvénient, on suspend le fléau par une ligne située un peu au-dessus de son centre de gravité, de façon qu'il ne peut se tenir en équilibre de lui-même, qu'autant qu'il est dans une position horizontale, et que son centre de gravité se trouve au-dessous de l'axe de suspension. C'est pour amener ce point à la position qu'on vient de dire, que l'on ajoute quelquefois au-dessous du fléau une petite masse étrangère.

2. *Des oscillations du fléau avant de se fixer.*

Lorsque l'équilibre est établi, si l'on vient à incliner le fléau d'un côté ou d'un autre, à l'instant où on l'abandonne à lui-même, il commence par se relever, pour s'abaisser du côté opposé, et ainsi alternativement. Le fléau fait donc des oscillations qui sont plus ou moins promptes, plus ou moins nombreuses, selon que le centre de gravité est placé plus loin ou plus près de l'axe de suspension.

Soit le fléau ACB (fig. 65) dont le centre de gravité est en G, et le point de suspension en C: si l'on incline ce fléau de manière à lui faire prendre la position A'CB', son centre de gravité passera en G', et n'étant plus soutenu, il tombera d'abord, pour se relever de l'autre côté, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il se fixe de nouveau au-dessous du point C après un certain nombre d'oscillations. La durée de chacune de ces oscillations dépend de la forme du fléau, et de la position de son centre de gravité. Ainsi la détermination de cette durée dans chaque cas particulier, n'est pas une chose facile.

Quoiqu'on puisse par la pensée concevoir tout le poids du fléau comme réuni au centre de gravité G, il ne faut pas croire néanmoins que ce centre de gravité se meuve autour du point fixe C, comme le ferait un *pendule simple* de la longueur CG. Il est évident que cela ne peut pas être, et qu'il faut ici avoir égard au nombre et à la disposition des particules matérielles du fléau autour du point G. En effet lorsque le fléau est dans la position A'B', la verticale CD le partage en deux parties inégales : le poids de la portion CDB' l'emporte sur le poids de l'autre partie, et le fléau se met en mouvement. L'excès de poids qui est ici la force motrice, se distribue sur toute la masse, ainsi qu'on l'a vu ci-devant dans les expériences sur les lois de la pesanteur : mais à mesure que le fléau descend, cet excès de poids de la partie CDB' diminue et le poids de la partie opposée augmente. La cause du mouvement s'affaiblit donc, et la résistance s'accroît; de sorte que pour déterminer tout ce qui concerne les balancemens du fléau donné, il nous faudrait des connaissances plus profondes que celles que nous avons données ou supposées jusqu'ici. Voici cependant un cas que nous pouvons résoudre, en faisant usage de ce qui a été dit ci-dessus.

Supposons que le fléau dont on veut mesurer les oscillations, ait la forme d'un parallélipipède AB (fig. 66), ayant *douze* pouces de longueur, *un pouce* de largeur, et *un demi-pouce* d'épaisseur ; et qu'il soit suspendu par le milieu C de son bord supérieur. Son centre de gravité sera donc à *un demi-pouce* au-dessous du point de suspension. Maintenant lorsqu'on tirera ce fléau de la position horizontale, et qu'on

l'abandonnera à lui-même, il fera des oscillations autour du point fixe C, dont la durée se trouvera, comme ci-dessus, en cherchant la longueur de pendule *simple* qui oscille dans le même temps. Or d'après la forme du fléau, et ses dimensions données, on trouve que cette longueur est de 24 *pouces et deux tiers*; et un pendule simple de cette longueur fait ses oscillations en *cinq sixièmes* de seconde à peu près. Telle sera la durée des oscillations de notre fléau. Si le point de suspension était plus près du centre de gravité, le pendule équivalent deviendrait plus long, et les oscillations du fléau deviendraient plus lentes. Elles seraient d'une durée infinie, et par conséquent nulles, si les deux points coïncidaient. (1)

Les deux bras du fléau étant supposés d'égale longueur, et d'un poids bien égal, si les forces qui agissent aux extrémités de ces bras sont *inégales*, leur résultante ne pourra point passer par l'axe, mais elle tombera à côté, et le fléau sera entraîné de ce même côté. La longueur des verges qui suspendent le bassin, ne fait rien ici : l'inégalité des poids détermine toujours de la même manière la position de la résultante par

---

(1) En combinant les notes des pages 266 et 277, on trouve que la longueur du pendule simple qui fait ses oscillations en même temps qu'un parallélipipède dont la demi-longueur est h, et la demi-largeur est a, qui se meut autour d'un axe parallèle à son épaisseur, et dont le centre de gravité est distant de l'axe de rotation d'une quantité A, que cette longueur, dis-je, est égale à $A + \frac{\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}h^2}{A}$. Cette longueur est donc ici, $\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times 36}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 12\frac{1}{12} \times 2 = 24\frac{2}{3}$.

rapport au point fixe, et par conséquent le fléau est toujours entraîné du côté du poids le plus fort avec une force proportionnelle à la différence des poids, sans qu'il puisse se relever, ni faire aucune oscillation. Si cette différence est très-petite, le fléau ne fera que s'incliner sans tomber tout-à-fait; et il s'arrêtera dans la position, où son centre de gravité qui s'est un peu élevé, pourra faire équilibre à l'excès d'un poids sur l'autre. Ainsi la quantité de l'inclinaison peut faire juger de la différence de pesanteur entre deux corps suspendus à la même balance.

3. *De la Romaine.*

La *romaine* ou *peson* (fig. 67.) est une balance consistant en un lévier AB de fer, partagé en deux parties fort inégales par le point d'appui C. Au bout du bras le plus court est fixé un crochet, ou suspendu un bassin, où l'on met les corps qu'on veut peser. Sur le bras le plus long peut glisser un poids qui sert à contre-balancer ces corps, en le plaçant à une distance convenable du point d'appui. Le fléau porte en C une chasse, et une espèce d'*index*, qui doit être renfermé dans la chasse, lorsque le fléau est bien horizontal, et que l'équilibre est établi. Sur le long bras BC sont faites des divisions, qui font connaître de suite et par la seule inspection, quel est le poids du corps suspendu en A.

Pour bien concevoir l'usage de cette balance, il faut savoir que les poids des deux bras du fléau ont d'abord été mis en équilibre entre eux; de façon que celui qui est le plus court, soit par l'excès de son épaisseur, soit

par le poids des crochets qui lui sont ajoutés, se trouve de même pesanteur que le bras le plus long. Les choses étant donc ainsi, si l'on suppose que la masse M pèse *une livre*, en suspendant en A un poids d'*une livre*, et plaçant la masse mobile M à une distance de l'axe égale à AC, il y aura évidemment équilibre. Si l'on pousse ensuite ce contre-poids à une distance *double*, il est également clair qu'il pourra faire équilibre à un poids *double*, et ainsi de suite ; de façon que si le bras BC est divisé en parties égales à AC, on pourra de suite et sans calcul, connaître *en livres* le poids des corps suspendus en A, par la division où il faudra placer la masse M pour l'équilibre. Les fractions de la livre seront données par des divisions intermédiaires.

La romaine est continuellement employée pour peser les choses qui ne sont pas très-précieuses. Elle est plus commode que la balance ordinaire, et son service est plus prompt. Elle exige moins de tâtonnemens et donne plus vite l'équilibre cherché : mais aussi elle est un peu moins exacte, à cause que le mouvement de la masse mobile se fait comme par sauts, et en passant d'une coche à la coche suivante, sans pouvoir l'arrêter dans l'intervalle. Cependant on assure que les Chinois font usage de cette espèce de balance pour peser l'or et les autres matières précieuses. Mais leur peson pour cet objet est fait d'un petit cylindre d'ivoire suspendu par un fil de soie, et sur lequel ils font glisser la petite masse qui sert de contre-poids. Ils pèsent avec cet instrument d'une manière aussi précise, qu'avec la balance la plus délicate.

4. *Du Peson à ressort.*

Donnons ici par occasion la description d'une autre espèce de peson, qui est d'une très-grande commodité, lorsqu'on n'a pas besoin de beaucoup d'exactitude, et qu'il s'agit de peser des poids un peu considérables, comme d'un ou deux quintaux. Cet instrument est composé d'une forte lame d'acier courbée en forme de C, à la partie inférieure de laquelle est adapté un crochet, où l'on suspend les corps que l'on veut peser. Le poids de ces corps oblige le ressort demi-circulaire de s'ouvrir d'autant plus qu'ils sont plus pesans. A mesure que la partie inférieure du ressort descend, une pièce verticale qui en dépend, et qui est taillée en rateau, descend aussi et fait mouvoir une aiguille, qui, s'arrêtant lorsque le poids a produit tout son effet, indique sur un cercle de métal divisé convenablement, la pesanteur du corps mis en expérience. L'effet de cette machine est fondé, comme on voit, sur les propriétés des corps élastiques, propriétés sujettes à s'affaiblir par l'usage : mais quand le ressort n'est pas forcé par des poids trop considérables, son élasticité se conserve, et cette espèce de peson peut servir long-temps.

On a imaginé encore plusieurs autres instrumens ou méthodes, pour rendre l'opération de peser plus prompte et plus commode. Mais aucune de ces inventions ne peut mériter la préférence sur la romaine pour la généralité, ni sur la balance pour la précision. Celle-ci est toujours employée pour les matières précieuses, depuis les gros ballots de soie pesant plusieurs quintaux, jusques aux pièces d'or qui ne pèsent

que quelques *grammes*. Lorsqu'on s'en sert pour ce dernier usage, on lui donne le nom de *trébuchet*. La pharmacie se sert aussi de balances communes fort délicates. Voyez à la Note (*h*) la description de deux autres espèces de balance.

CHAPITRE VIII.

DE LA POULIE.

LA *poulie* (fig. 68) est un corps rond et plat, dont la circonférence est creusée en gorge pour recevoir un cordon. La poulie est traversée à son centre par un axe sur lequel, ou avec lequel elle peut tourner. L'axe est appuyé de part et d'autre dans une pièce qui embrasse la poulie, et qu'on appelle la *chape*. Lorsque la chape est suspendue à un point fixe, la poulie ne peut que tourner sur elle-même, sans changer de place, et l'on dit alors que la poulie est *fixe*. L'on dit qu'elle est *mobile*, lorsque c'est un des bouts du cordon qui est attaché au point fixe, et que la poulie peut monter et descendre tout en tournant sur elle-même.

1. *Poulie fixe et simple.*

Dans la poulie fixe pour qu'il y ait équilibre, il faut que *les masses de la puissance et de la résistance soient égales entre elles*. Le point d'appui étant placé

au centre, tous les rayons de la poulie que nous supposons *circulaire*, étant égaux, et le cordon qui embrasse cette poulie, étant tangent à la circonférence aux points où il s'en sépare, il suit que les forces dans tous les cas agissent perpendiculairement à l'extrémité du rayon, et que leurs distances à l'axe du mouvement sont toujours égales; ce qui exige pour l'équilibre, que les forces soient aussi égales entre elles.

Si le cordon embrasse la moitié de la poulie, le diamètre qui aboutit aux points d'application de la puissance et de la résistance, peut être considéré comme un lévier droit de la première espèce, ayant son point d'appui au milieu de sa longueur. Si la partie de la circonférence qu'embrasse le cordon, est plus grande ou plus petite que cette moitié, toujours les deux rayons menés aux points d'application des forces, formeront un lévier angulaire du même genre, ayant ses deux bras égaux : et par conséquent les conditions de l'équilibre seront les mêmes dans tous les cas. La portion de la circonférence sur laquelle le cordon s'applique, n'a ici aucune influence, et ne sert qu'à changer la direction des forces.

La poulie fixe ne peut donc favoriser la puissance, ni du côté de la force, ni du côté du temps. Elle n'en est pas cependant d'un service moins utile et moins fréquent, par la raison qu'elle offre à la puissance une manière d'agir extrêmement commode, lorsque l'équilibre étant rompu en faveur de celle-ci, on se propose de communiquer du mouvement à la résistance. Qu'il soit question, par exemple, de tirer de l'eau d'une profondeur où elle s'est amassée. Si au moyen d'un seau suspendu à une corde, on voulait tirer cette eau direc-

tement et en agissant de bas en haut ; la chose ne pourrait se faire qu'avec beaucoup de peine ; et les muscles de notre corps éprouveraient une grande fatigue par cette manière d'agir. Mais si faisant passer la corde sur une poulie fixée au-dessus du puits, on tire cette eau de la manière connue, la peine alors devient bien moindre, parce qu'on agit de haut en bas, et que l'on peut ainsi aider l'action des muscles avec le poids de son corps.

Lorsqu'une poulie par l'usage a perdu sa forme circulaire, alors elle peut servir ou nuire à la puissance, selon que celle-ci agit par un rayon plus long ou plus court. Cette altération dans la figure de la poulie arrive surtout, lorsqu'on la fait tourner sur un axe fixe. Le trou central s'agrandit peu-à-peu, d'où il arrive que la poulie est divisée en deux parties inégales, dont la supérieure est moindre que l'inférieure ; et qu'elle tourne ainsi avec plus de difficulté. Il vaut mieux que l'axe soit fixé à la poulie, et qu'on le fasse tourner sur un support quelçonque. Car si les trous qui reçoivent cet axe, viennent à s'agrandir, tout l'inconvénient qui peut en résulter, c'est que la poulie toute entière descende de quelque chose ; mais sa forme n'aura éprouvé aucune altération, et son mouvement se fera toujours avec la même facilité.

2. *Poulie fixe et composée.*

Si par le moyen d'une poulie simple et fixe on ne peut mettre en équilibre que des forces égales, il est possible cependant d'établir cet équilibre entre des forces inégales, en faisant usage de plusieurs poulies

de diamètres différens, enfilées sur le même axe. En effet soient deux poulies (fig. 69), dont les rayons sont dans le rapport de *deux à un*, assujéties à tourner ensemble sur le même axe, et ayant chacune un cordon particulier attaché à quelque point de sa circonférence; il est visible que si un poids d'*une livre* par exemple, est suspendu au cordon de la plus grande poulie, il faudra pour l'équilibre, un poids de *deux livres* au cordon de la plus petite agissant du côté opposé. A la vérité les forces ne sont pas ici dans un même plan: mais les plans qui les contiennent, sont parallèles et fort près l'un de l'autre. Les deux forces d'ailleurs agissent pour faire tourner le système des deux poulies en sens opposés autour du même axe, et leurs momens relativement à cet axe sont égaux.

Maintenant si au lieu de deux poulies différentes, on conçoit une seule poulie (fig. 70) d'une épaisseur suffisante, et dont le diamètre aille en diminuant d'une surface à l'autre, on voit qu'un même poids suspendu à la circonfèrence de cette poulie, aura un moment plus grand ou plus petit, selon qu'il sera plus ou moins éloigné de l'axe. Une poulie de cette forme, qui s'appelle une *poulie conique*, est donc très-propre à mettre en équilibre deux forces, dont l'une serait *constante*, tandis que l'autre éprouverait *des variations dans son intensité*.

Supposons par exemple, qu'une résistance demeurant toujours la même, la puissance qui doit lui faire équilibre, aille elle-même en diminuant. L'on aura recours à une poulie semblable, et l'on disposera les choses de manière que la puissance commençant d'agir par le moindre rayon de la poulie, son action à mesure

qu'elle s'affaiblit, se fasse par des rayons de plus en plus grands, et qu'elle regagne par l'accroissement de la distance à l'axe, ce qu'elle perd par la diminution de son intensité. La disposition des choses se ferait d'une manière opposée, si la puissance allait en augmentant.

On a fait de cette espèce de poulie une application fort ingénieuse et en même temps fort utile, pour régulariser le mouvement de ces petites horloges de poche, que l'on appelle des *montres*. On sait que dans ces jolies machines le mouvement est entretenu pendant plus de 24 heures par un ressort roulé sur lui-même, et qui se développe lentement pendant tout cet espace de temps. Or la force d'un ressort est la plus grande, lorsqu'il commence à se débander, et elle va en décroissant de plus en plus à mesure qu'il se déploie. Cependant le rouage qu'il faut mouvoir oppose toujours la même résistance; d'où il suit que le mouvement des roues, et par conséquent celui des aiguilles qui indiquent le temps, irait en se ralentissant de plus en plus, si l'on n'avait trouvé le moyen de faire agir le ressort constamment avec le même avantage contre une résistance qui est aussi toujours la même. Ce moyen consiste dans l'emploi d'une pièce qu'on appelle la *fusée*, et qui est semblable à la poulie conique dont on vient de parler. Voici donc quel est le mécanisme dont on s'est avisé.

Dans une montre ordinaire le ressort moteur est enfermé dans une boîte cylindrique, que l'on appelle *tambour* ou *barillet*. Il est fixé par une de ses extrémités à l'axe immobile du cylindre, et par l'autre extrémité à la surface intérieure de ce cylindre; de façon que l'action du ressort dans son développement se porte contre la circonférence du tambour, et lui fait prendre un mou-

vement de rotation autour de l'axe. Tandis que le tambour tourne sur lui-même, il tire à lui une *petite chaîne* très-flexible qui est enveloppée sur la fusée, et qui se roule ensuite sur le tambour. Cette chaîne est le moyen par lequel le ressort agit sur la fusée, et lui communique un mouvement de rotation contraire à celui du tambour; et comme la base de la fusée repose sur une roue à dents qu'elle entraîne avec elle, le mouvement se transmet ainsi à toutes les pièces du rouage, comme il sera expliqué plus bas en parlant des *roues dentées*. La partie de la chaîne par laquelle le ressort agit sur la fusée pour la faire tourner lorsqu'il a son *maximum* de force, est justement celle qui enveloppe le sommet de la fusée, où cette pièce a son plus petit diamètre. A mesure que le ressort s'affaiblit en se développant, il tire à lui des parties qui approchent plus de la base; ce qui lui rend l'avantage que son affaiblissement lui faisait perdre, et qui maintient ainsi l'*uniformité* du mouvement, sans laquelle nous n'aurions que des mesures du temps inexactes et infidelles.

Lorsqu'on monte une montre, on fait tourner la fusée sur elle-même à contre-sens : elle ramène ainsi la chaîne qui s'était roulée sur le tambour, fait aussi tourner celui-ci sur son axe, et oblige ainsi le ressort à se bander de nouveau en se repliant sur lui-même. La roue dentée qui sert de base à la fusée, ne participant point à ce mouvement, il n'y a point de rétrogradation dans les roues ni dans les aiguilles pendant le temps employé à monter la montre.

Comme il ne serait guère possible de construire une fusée avec une telle précision, qu'elle pût à chaque instant compenser exactement l'affaiblissement du res-

sort ; pour achever de donner au mouvement d'une montre toute l'uniformité désirable, on y ajoute un mécanisme qui a quelque ressemblance avec l'*échappement* dont on a parlé en traitant du pendule appliqué aux horloges. C'est une roue dont les dents sont taillées *obliquement*, et doivent pousser l'une après l'autre deux *palettes* fixées à un même axe, et qui s'engagent tour-à-tour entre les dents de cette roue. L'axe de ces palettes porte un rouleau qui s'appelle le *balancier*, et dont le mouvement alternatif est entretenu par un ressort délié, roulé en spirale, et que l'on peut bander plus ou moins pour que le mouvement du rouage ne soit ni trop vif ni trop lent, et qu'il s'achève dans le temps convenable. Il y a encore d'autres moyens de rendre régulier le mouvement d'une montre : mais ils ne sont pas de notre objet.

On a proposé d'employer la poulie conique pour mettre plus d'égalité dans le travail des chevaux, qui tirent le minérai et le charbon du fond des mines. Ici le poids des cables qui est très-considérable, fait une résistance variable, qui exige de la part des chevaux des efforts tantôt plus tantôt moins grands. Il paraît qu'il serait plus avantageux pour la conservation de ces utiles animaux, que leurs forces fussent employées avec plus de ménagement et d'égalité.

3. *Poulie mobile.*

Supposons qu'un des bouts de la corde qui embrasse la poulie, soit attaché à quelque point fixe A (fig. 71); et que la chape de cette poulie étant renversée, on y suspende un fardeau quelconque R : la puissance

agissant à l'autre bout de la corde pour soutenir ce fardeau, on demande quel est l'effort qu'elle sera obligée de faire pour cela. Pour que la puissance agisse d'une manière plus commode, on peut faire passer la portion Bc de la corde sur une poulie fixe B, ce qui ne changera rien aux conditions de l'équilibre, et supposer que cette puissance agit suivant BP.

Pour répondre à la question présente, on unira par une droite *abc* les points où la corde se détache de la circonférence de la poulie. Cette droite sera horizontale, puisqu'il faut pour l'équilibre que la direction de la force R partage en deux parties égales l'angle formé par les prolongemens des deux cordons. Maintenant la droite *ac* peut être considérée comme un lévier du deuxième genre : son point d'appui est en *a*, la puissance est censée agir en *c*, et la résistance se fait sentir en *b* dans le sens vertical *b*R. Si donc du point *a* on abaisse la perpendiculaire *ad* sur la direction de la puissance, on aura pour l'équilibre la condition cherchée : que la puissance *est à* la résistance, *comme ab est à ad*, ou bien *comme ao est à ac*, ou enfin *comme* le rayon de la poulie *est à* la soutendante de l'arc embrassé par la corde. (1)

Lorsque les deux parties de la corde sont parallèles entre elles, l'arc embrassé est égal à la demi-circonférence, et la soutendante de cet arc est un diamètre. La puissance ne doit donc être alors que *la moitié* de la résistance : c'est le cas le plus favorable ; un poids de

---

(1) Les deux triangles *acd*, *aob* étant semblables, on en tire la proportion ; *ad* : *ab* :: *ao* : *ac*.

cent livres est alors tenu en équilibre par une force de *cinquante* livres. Mais aussi quand on voudra élever le fardeau d'*un pied*, il faudra que la puissance parcoure un espace de *deux pieds :* car afin que le centre de la poulie monte d'*un pied*, il est nécessaire que chaque partie de la corde s'accourcisse d'autant, et par conséquent qu'il s'en développe une longueur de *deux pieds.*

4. *Tension des cordons et charge de l'axe dans les poulies.*

Dans la poulie mobile, les deux parties de la corde, ou les deux cordons sont également tendus. Cette *tension* est pour le cas du parallélisme, égale à *la moitié* du fardeau, le point fixe et la puissance portant chacun la moitié de la charge. Dans le cas des cordons non-parallèles, le point d'appui et la puissance font bien encore des efforts égaux : mais chacun de ces efforts est plus grand que la moitié de la charge, et les deux forces exercent l'une contre l'autre une partie de leur action en pure perte pour l'effet désiré, le soutien du fardeau.

Dans la poulie fixe les tensions des deux cordons sont encore égales entre elles, et mesurées chacune par l'une des deux forces qui se font équilibre par son moyen. L'effet ici est évidemment le même que si le cordon était attaché par un bout à un point fixe, et que la puissance ou la résistance agissent directement contre ce point au moyen du cordon.

Quant à la charge de l'axe, elle est dans la poulie fixe, comme dans le lévier du premier genre, et lorsque les forces sont parallèles, égale à la somme des deux

forces, ni plus, ni moins. Si deux poids de *cent livres* chacun sont mis en équilibre, par le moyen de cette poulie, la pression sur l'axe sera de *deux cent livres ;* et cette pression se fera sentir parallèlement aux deux forces ou verticalement. Si les forces ne sont point parallèles, la pression se fera suivant la droite qui divise en deux également l'angle que font les deux forces au point où elles concourent, et sa grandeur sera donnée par la diagonale du parallélogramme construit à l'ordinaire; elle sera donc toujours moindre que dans le cas précédent.

Dans la poulie mobile, lorsque l'équilibre est rompu, le mouvement se fait sur un point de la circonférence, celui où le cordon attaché au point fixe est tangent à cette circonférence. Mais comme la direction du fardeau doit demeurer verticale, la poulie en montant tourne encore sur son axe. La charge de cet axe est ici toujours égale au poids du fardeau tout entier, et la puissance ne peut ni augmenter, ni diminuer cette charge, quelle que soit sa direction.

4. *Des Poulies combinées ou moufles.*

La poulie mobile est avantageuse à la puissance, au moins tant que la *soutendante* de l'arc embrassé par la corde est plus grande que le rayon de la poulie. Mais lorsque plusieurs poulies de ce genre sont combinées entre elles, la puissance en retire de bien plus grands avantages.

Supposons, par exemple, que la corde qui embrasse la poulie mobile P (fig. 72), au lieu d'être tirée immédiatement par la puissance, soit attachée à la chape

d'une autre poulie mobile P', également embrassée par une corde, dont un des bouts est aussi attaché à un autre point fixe, tandis que l'autre bout va de même s'attacher à la chape d'une troisième poulie P'', et ainsi de suite; chaque poulie ayant sa corde et son point fixe particulier. Si de plus tous les cordons sont parallèles entre eux, on aura pour l'équilibre la condition suivante : *la puissance* est à *la résistance*, comme l'*unité* est au *nombre deux multiplié par lui-même autant de fois moins une qu'il y a de poulies mobiles*. Dans le cas de *trois* poulies seulement, *une livre* tiendra en équilibre *huit livres* ; c'est-à-dire que la puissance n'a alors à soutenir que la *huitième* partie du fardeau. Sa charge est un peu plus grande, quand les cordons ne sont point parallèles : elle *est à* la résistance dans ce cas, *comme* le produit des rayons des poulies *est au* produit des soutendantes des arcs embrassés par les cordes. Ces conditions d'équilibre ne changent point lorsque pour la commodité de la puissance on fait passer la dernière corde sur une poulie fixe.

Pour reconnaître la vérité de ce qu'on vient d'établir, il suffit d'observer que dans le cas des cordons parallèles, le fardeau R est porté *également* par le point fixe A, et par la chape de la seconde poulie. Celle-ci n'a donc à soutenir que la *moitié* de R, laquelle moitié se partage de même entre le point fixe B et la troisième poulie, qui n'a ainsi à porter que le *quart* du fardeau, et de même pour les autres si le nombre des poulies est plus considérable. Mais s'il se borne à *trois*, la troisième poulie ne supportant, comme on vient de voir, que le quart de la résistance R, et la moitié de ce quart étant porté par le point fixe C, il est clair que la puis-

sance n'aura à soutenir que la *huitième partie* de la charge totale. Donc en général la charge de la puissance est une partie du fardeau ayant pour dénominateur le nombre *deux* multiplié par lui-même *autant de fois moins une* qu'il y a de poulies mobiles. Le cas des cordons non-parallèles se démontrerait de même.

Dans le système de poulies mobiles dont il est ici question, la tension des différentes cordes appartenant à chaque poulie, va en diminuant depuis la poulie où le fardeau est attaché, jusqu'à celle qui reçoit immédiatement l'action de la puissance. En effet les deux cordons de la première soutenant à eux deux le fardeau tout entier, sont tendus l'un et l'autre par une force égale à *la moitié* de ce fardeau. La seconde poulie ne supportant que la moitié de la charge, les cordons qui lui appartiennent n'éprouveront qu'une tension équivalente au *quart*, et ainsi des autres s'il y en a davantage. Ces tensions seront un peu plus grandes, si les cordons ne sont pas parallèles : mais elles diminueront de même en passant d'une poulie à l'autre de bas en haut.

Cette combinaison de poulies procurant un très-grand avantage à la puissance, il ne sera pas inutile de montrer ici que cette économie de force ne s'obtient encore qu'aux dépens du temps. Dans le système des trois poulies mobiles qu'on vient de considérer, si l'on veut que le fardeau R s'élève seulement d'*un pied*, il est nécessaire que la puissance parcoure un espace de *huit pieds*. D'abord la première poulie montant d'*un pied* par supposition, la corde qui lui appartient devra se développer de *deux pieds*. Le centre de la seconde poulie sera donc monté de cette quantité ; mais pour

cela il faut que sa corde s'accourcisse de *quatre pieds*. La même chose arrivera à la troisième poulie, dont la corde s'accourcira de *huit pieds* : ce qui exprime le chemin que la puissance est obligée de parcourir, pour que la résistance monte seulement d'*un pied*.

La disposition de poulies mobiles qu'on vient d'examiner, est sans aucun doute celle qui offre à la puissance de plus grands avantages ; mais elle n'est pas la plus commode, parce qu'elle exige beaucoup d'espace et beaucoup de temps. Il est d'autres arrangemens moins embarrassans et plus usités. On appelle *moufle* un assemblage de poulies ou fixes, ou mobiles, formant les unes et les autres deux systèmes séparés et correspondans.

Soient deux séries de poulies de grandeurs décroissantes, renfermées chacune dans une même chape (fig. 73) et placées l'une au-dessus de l'autre. Si une même corde embrasse toutes ces poulies en allant alternativement de la moufle supérieure qu'on suppose fixe, à la moufle inférieure qui est mobile, on aura une machine au moyen de laquelle une puissance donnée pourra agir avec avantage contre une certaine résistance. Le fardeau à soutenir ou à élever étant suspendu à la moufle mobile, et le nombre des poulies de cette moufle étant connu, on trouvera facilement de la manière suivante quelle est dans cette machine la condition de l'équilibre.

Le cordon où la puissance est appliquée, éprouve évidemment une tension égale à cette puissance : mais le cordon suivant ne peut pas être plus fortement tendu, sans quoi il entraînerait celui-là. Il en est de même des cordons subséquens ; d'où il suit que la

charge est également supportée par tous les cordons. Or lorsqu'un poids est soutenu par un certain nombre de forces égales, chacune de celles-ci n'en porte qu'une fraction exprimée par le nombre de ces forces. Ainsi la tension du premier cordon ou *la puissance* est ici à *la résistance*, comme *l'unité* est au *nombre des cordons qui aboutissent à la moufle mobile.* On suppose que les cordons sont parallèles entre eux, ou à peu près.

On arrange encore les deux systèmes de poulies de plusieurs autres manières. La méthode la plus ordinaire consiste à disposer les unes et les autres séparément sur deux axes différens, et dans deux chapes distinctes. De cette manière elles peuvent être toutes de même grandeur, et elles occupent moins d'espace : mais les cordons ne sont plus alors exactement parallèles entre eux. Cependant s'ils s'écartent peu du parallélisme, le rapport des deux forces en équilibre sera encore à peu près le même qu'on vient d'établir. Au reste, la puissance aura d'autant plus de désavantage que les cordons auront plus d'inclinaison les uns à l'égard des autres. Les poulies mouflées sont fort en usage dans toutes les circonstances où l'on veut élever d'une petite quantité de lourds fardeaux, soit pour les peser, soit pour tout autre objet.

On a dit que la puissance dans les moufles était obligée de faire beaucoup de chemin, pour ne faire parcourir à la résistance qu'un fort petit espace ; ce qui est pour la première une perte de temps inévitable. Réciproquement on peut au moyen des poulies mouflées menager le temps et l'espace aux dépens de la force. Si donc un corps ne peut parcourir en descen-

dant qu'une hauteur fort limitée, et trop peu étendue pour l'objet qu'on a en vue, on pourra ralentir sa chute en employant une moufle, composée par exemple de deux poulies l'une fixe et l'autre mobile. Car pour que ce corps qui est suspendu à la poulie mobile, descende d'*un pouce*, il faudra que chaque cordon s'alonge de cette quantité, et par conséquent qu'il se développe une longueur de corde de *deux pouces*, ou que le contre-poids monte d'autant. Mais comme le contre-poids n'a aussi que le même espace à parcourir, on l'attachera de même à une poulie mobile, ce qui exigera un égal développemeut de corde : de façon que le temps de la descente, comme celui de la montée, sera *double* de celui qu'il faudrait si les deux corps agissaient l'un sur l'autre au moyen d'une simple poulie fixe. Tel est le procédé que l'on emploie pour les pendules ou horloges à poids, lorsqu'on veut prolonger la durée de leur marche.

CHAPITRE IX.

DES ROUES.

LES *roues* de voiture sont des corps circulaires qui tournent sur leur *axe* ou *essieu* en s'appuyant contre le terrein : à cet égard elles ressemblent aux poulies mobiles. L'essieu des roues est contenu dans une boîte,

de laquelle partent plusieurs *rayons* appelés *rais*, qui se terminent à la circonférence de la roue. Ces rayons sont en général inclinés au plan du cercle de dedans en dehors, de façon que la roue vue en face forme une concavité, dont l'avantage pour la stabilité est facile à apercevoir.

Quoique les roues n'aient été imaginées, et qu'elles ne soient généralement employées que pour faciliter le transport des lourds fardeaux, l'on peut néanmoins les considérer encore comme propres à établir l'équilibre entre deux forces, et chercher les conditions de cet équilibre. Lorsqu'une roue repose sur un plan parfaitement horizontal, et qu'elle est tirée parallèlement à ce plan, on peut concevoir le rayon vertical de cette roue comme un lévier qui a son point d'appui contre le terrein : la puissance est appliquée à son extrémité supérieure, tandis que la résistance qui est le fardeau, porte sur l'essieu. Les deux forces sont donc ici appliquées au même point du lévier : mais l'une agit dans une direction horizontale, et l'autre dans le sens vertical. Ces deux directions étant l'une à l'autre perpendiculaires, il suit que la moindre puissance sur un plan parfaitement uni, et avec un essieu sans frottement, suffirait pour faire avancer la charge la plus pesante. Mais si le plan est inégal, si la roue vient à rencontrer quelque élévation, alors le rayon qui appuye contre le terrein, n'est plus vertical. La charge dont l'action se fait toujours sentir dans ce dernier sens, et qui agit à l'extrémité supérieure de ce rayon, n'est plus entièrement soutenue par le point d'appui ; et la puissance est alors obligée d'en supporter une partie d'autant plus grande, que le rayon qui est appuyé contre le terrein s'éloigne plus de la ligne verticale.

Il est facile d'avoir la mesure de l'effort que la puissance est obligée de faire pour l'équilibre, lorsque l'inclinaison du rayon d'appui est connue. En abaissant du point d'appui A (fig. 74) les perpendiculaires AB, AD sur les directions des deux forces, la condition d'équilibre exige, comme on sait, que l'on ait : *la puissance multipliant AB égale à la résistance multipliée par AD.* Or si l'on représente la pesanteur de la charge par une partie quelconque CD de la verticale abaissée de son centre de gravité, on pourra décomposer cette force en deux, l'une CA dirigée contre le point d'appui, et détruite par la résistance du terrein, et l'autre CE horizontale, et opposée à la puissance. C'est à celle-ci que la puissance doit être égale, pour qu'il y ait équilibre, et qu'elle doit être supérieure, pour qu'il y ait du mouvement. Il est visible que cette dernière sera d'autant plus petite, que la roue aura de plus grandes dimensions. Ainsi les grandes roues rencontrent moins d'obstacles, et donnent moins de peine que les petites roues; outre qu'en tournant avec moins de vitesse, elles éprouvent un moindre frottement.

On appelle *jantes* d'une roue les pièces courbes dont sa circonférence est composée. On a jugé avec raison que les jantes larges entament moins le terrein, et nuisent moins aux routes que celles qui sont plus étroites, parce que le fardeau dans le premier cas porte sur un plus grand nombre de points. Le seul inconvénient que présentent les jantes larges, c'est qu'elles ne peuvent pas éviter, ni écarter aussi facilement les pierres et les cailloux qui se trouvent sur leur passage. Mais cet inconvénient est bien moindre que ceux qui résultent de l'emploi des jantes étroites, qui sillonnent les rou-

tes, y creusent des ornières, et travaillent sans cesse à les dégrader, tandis que les autres au contraire contribuent à les affermir et les consolider.

CHAPITRE X.

DU TREUIL ET DU CABESTAN.

LE *treuil* (fig. 75) est ordinairement composé d'un cylindre qui peut tourner sur lui-même et repose sur deux appuis, et d'une roue qui est fixée à la circonférence du cylindre, et qui a son centre sur quelque point de l'axe; de manière que ces deux pièces sont assujetties à tourner ensemble autour du même axe. Une corde enveloppée sur le cylindre, est attachée à la résistance qu'il faut vaincre, et la puissance qui doit la surmonter, est appliquée à la circonférence de la roue. Lorsque la résistance est un poids, son action se fait toujours selon une verticale *tangente* à la circonférence du cylindre. Quant à la puissance, elle agit ou au moyen d'une corde qui enveloppe la roue, et par conséquent suivant une *tangente* à la circonférence de cette roue, ou par le moyen de chevilles implantées sur le bord de la roue perpendiculairement à son plan, ou enfin par des léviers qui traversent le cylindre, et remplacent la roue.

1. *Condition d'équilibre dans le Treuil.*

Dans la machine que nous considérons ici, les deux forces qui luttent l'une contre l'autre, ne se trouvent pas dans un même plan, et ne sont pas appliquées aux deux bras d'un même lévier. Cependant nous pouvons encore les y rapporter, et trouver les conditions de l'équilibre de la manière suivante.

Imaginons un plan horizontal mené par l'axe du cylindre. Ce plan rencontrera la corde qui soutient le fardeau, dans le point H où elle se détache du cylindre, et celle qui appartient à la puissance, en un certain point M. Si l'on unit ces deux points par une droite MH qui coupe l'axe en un point K, l'on pourra considérer cette droite comme un lévier dont le point d'appui est en K, et aux extrémités duquel sont appliquées, la résistance qui agit suivant la verticale HQ, et la puissance dont la direction est MP, direction renfermée dans le plan de la roue, mais d'ailleurs inclinée plus ou moins à l'horizon.

Si l'on prend sur MP la partie MN pour représenter la grandeur absolue de cette puissance, on pourra la décomposer en deux, l'une MR verticale, et l'autre MO horizontale et dirigée vers le point C de l'axe. Celle-ci est donc détruite par la fixité de l'axe, et il ne reste que la force MR pour faire équilibre au fardeau Q. On a donc ici deux forces parallèles, verticales et appliquées aux bras du lévier horizontal MH qui a son appui au point K. On aura donc la proportion : la force MR *est à* la résistance Q, *comme* KH *est à* MK, ou *comme* GH *est à* CM, puisque ce rapport est le

même que l'autre. Passant ensuite à la force totale MN, on conclura, que la puissance *est ici à* la résistance, *comme* GH *est à* CF, c'est-à-dire, *comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.* (1)

On aurait trouvé le même résultat si l'on avait *projeté* la section du cylindre où le fardeau est attaché, sur le plan de la roue. C'eût été le même cas que pour les poulies fixes de différens diamètres enfilées sur le même axe. La théorie des momens aurait également conduit au même but : car la puissance et la résistance travaillant à faire tourner le système en sens contraire, doivent pour l'équilibre être entre elles réciproquement comme les rayons de la roue et du cylindre, qui mesurent leurs distances à l'axe de révolution. Nous avons préféré la première méthode, parce qu'au moyen de la décomposition de la force MP nous avons pu reconnaître qu'il se faisait sur l'axe une pression qui ne doit pas être négligée.

2. *De la charge des appuis.*

Les conditions de l'équilibre dans le treuil ayant été trouvées, il faut à présent chercher quelle est la charge que supportent les appuis. D'abord la machine entière a un certain poids, que l'on peut considérer comme

---

(1) Les deux triangles GHK et CMK sont semblables; d'où KH : KM :: GH : CM ; et par conséquent MR : Q :: GH : CM. Mais les deux triangles MON, CMF sont aussi semblables, et l'on a par suite, MN : ON = MR :: CM : CF. Multipliant ces deux proportions par ordre, il vient, MN ou P : Q :: GH : CF. Ce qu'il fallait prouver.

résidant dans son centre de gravité. Or le centre de gravité du cylindre est dans l'axe au milieu de sa longueur : celui de la roue est aussi dans l'axe au centre de la roue. En partageant la distance qui sépare ces deux points, en parties *réciproquement* proportionnelles aux poids de la roue et du cylindre, on aura le centre de gravité commun, c'est-à-dire le point où le poids de toute la machine est censé réuni. Maintenant cette partie de la charge doit être distribuée, comme on a vu, sur les deux appuis en *raison inverse* de leurs distances à ce point.

En second lieu le fardeau et la puissance qui lui fait équilibre, agissant aux extrémités d'un lévier fictif, qui a son point d'appui sur l'axe, le cas est le même à cet égard que si les deux forces étaient immédiatement appliquées à ce point de l'axe. Cette charge qui est verticale comme la précédente, se partagera encore entre les deux appuis en raison réciproque de leurs distances.

Reste enfin la force horizontale que nous avons trouvée par la décomposition de la puissance donnée. Celle-ci est comme appliquée au centre de la roue, et étant distribuée de la même manière, elle fait naître sur les deux appuis une pression horizontale, qu'il faudra combiner avec les pressions verticales déjà trouvées, pour avoir la grandeur absolue, et la véritable direction de l'effort que ces appuis ont à supporter, et auquel il est nécessaire qu'ils puissent résister.

Donnons un exemple de ces calculs. Soit un treuil (fig. 75) dont le cylindre AB a *huit pieds* de longueur, et *un demi-pied* de rayon, et dont la roue a un rayon de *quatre pieds.* Supposons que le centre de la roue soit placé *au quart* de la longueur de l'axe, et que le

fardeau réponde *aux trois quarts* de cette longueur.
D'abord l'équilibre exige ici que la puissance *soit à* la résistance, *comme* un *est à* huit ; c'est-à-dire que *cent livres* font ici équilibre à un poids de *huit cent livres.* Mais cette puissance est censée agir perpendiculairement au rayon de la roue, dans une direction inclinée, ou non, à l'horizon.

Si la force employée est verticale, elle ne se décomposera point, et elle ne produira aucun effort horizontal contre le point C qui est le centre de la roue, ni par conséquent contre les appuis; mais la pression verticale en sera plus grande. L'axe dans le cas présent, est donc chargé quelque part d'un poids égal à la somme des deux forces. Pour trouver le point qui supporte cette charge, il faut partager la distance CG qui est de *quatre pieds* dans notre exemple, en *neuf* parties égales, et compter *huit* de ces parties depuis le centre de la roue. Ce sera là le point cherché, lequel est placé par conséquent à $2\frac{4}{9}$ pieds de l'extrémité B du cylindre. C'est dans cet endroit que l'on doit supposer réunis le fardeau de 800 livres et la puissance qui est de 100. Pour distribuer ensuite la totalité de cette charge sur les deux appuis, on fera comme il va être dit.

Dans le cas où la puissance est inclinée à l'horizon, elle se décomposera en deux, et produira deux pressions. Si l'on suppose l'inclinaison de 45 degrés, ce qui donne pour chacun des côtés MR et MO du parallélogramme une valeur de 71 lorsque la diagonale MN vaut 100, on trouvera que le point K de l'axe est chargé d'un poids de 871 livres, et qu'il est situé sur l'axe à une distance de C telle que GK *est à* CK, *comme* 71 *est à* 800, ou

comme 1 *est à* 11 à peu près. On divisera donc la distance CG en *douze parties*, et on en comptera *onze* à partir du point C. Le point ainsi trouvé sera le point cherché K, qui est par conséquent distant de l'appui A de 68 pouces, et de l'appui B de 28 pouces seulement.

La charge totale du point K étant de 871 livres dans le cas présent, il faut la partager en deux portions, qui soient dans le rapport des nombres 68 et 28, ou ce qui revient au même des nombres plus simples 17 et 7. Ces portions sont de 254 livres et de 617. L'appui B éprouvera donc une pression verticale de 617 livres, et l'appui A une seulement de 254 livres, par l'effet du fardeau et de la force qui le tient en équilibre. Il faut observer que cette charge varie pour chaque appui, à mesure que le fardeau répond à des points différens de l'axe; elle diminue pour l'appui dont il s'éloigne, et augmente au contraire pour celui dont il s'approche.

La pression qu'on vient de trouver, est accrue par le poids de la machine elle-même. Si l'on suppose que le cylindre pèse 400 livres, et la roue 200, le centre de gravité du cylindre étant au milieu de sa longueur, et celui de la roue étant à son centre de figure, on divisera la distance qui sépare ces deux points en *trois* parties égales; et le centre de gravité commun sera à la *seconde division* à partir du point C, c'est-à-dire qu'il sera à 16 pouces de distance du centre de la roue; et par conséquent ce point est éloigné de l'un des appuis de 40 pouces, et de l'autre de 56. Le poids total de la machine qui est de 600 livres, étant partagé *réciproquement* à ces distances, donne pour la charge de l'appui B 250 livres, et 350 pour celle de l'appui A. Ainsi la pression verticale en B est en totalité de 867 livres, et celle en A de 504 livres.

Reste la partie de la puissance P qui est dirigée horizontalement contre le point C, et qu'on a supposée aussi équivalente à 71 livres. Si l'on décompose cette force en deux forces parallèles et horizontales appliquées en A et en B, on aura pour la première 53 $\frac{1}{4}$ livres, et 17 $\frac{3}{4}$ pour la seconde. Ainsi finalement l'appui A est sollicité par deux forces, l'une verticale de 504 livres, et l'autre horizontale de 53 livres à peu près. Comme celle-ci est un peu plus que la *dixième* partie de celle-là, pour les *composer* ensemble, on construira dans un plan vertical perpendiculaire à l'axe un parallélogramme rectangle, dont le côté horizontal soit un peu plus grand que la *dixième* partie du côté vertical; et la diagonale de ce parallélogramme exprimera la direction et la grandeur de l'effort que supporte l'appui A, et auquel il est nécessaire qu'il puisse résister. Quant à l'appui B, on trouverait de même la résultante des deux pressions qu'il éprouve. Mais comme la pression horizontale n'est guère que la 48.ème partie de celle qui agit dans le sens vertical, on voit qu'on peut ici la négliger sans inconvénient, ou que du moins l'effort qui se fait sur cet appui, s'éloigne fort peu de la direction verticale.

3. *Observations sur l'emploi de la machine du Treuil.*

Observons ici que lorsqu'on se sert d'un treuil pour élever un fardeau, et que la corde qui soutient ce fardeau s'enveloppe sur le cylindre, il faut avoir soin de la développer en même temps, et d'empêcher qu'elle ne se roule sur elle-même, ce qui augmenterait le bras de lévier de la résistance, et exigerait de la part de la puissance l'emploi d'une plus grande force.

J'observe encore que les poids suspendus à une corde, étant censés agir suivant l'axe de cette corde, il faut pour avoir la veritable distance à l'axe fixe, ajouter pour la résistance le rayon de la corde au rayon du cylindre ; et si la puissance agit aussi par le moyen d'une corde, on ajoutera de même la demi-épaisseur de la corde au rayon de la roue. Mais il est visible que cette addition est moins avantageuse à la dernière de ces forces.

La puissance *multipliée* par le rayon de la roue étant égale dans le treuil à la résistance *multipliée* par le rayon du cylindre, l'on trouve encore ici que tout l'avantage de la première est dû à une plus grande vitesse. Pour élever le fardeau d'une quantité égale à la circonférence du cylindre, il faut que la roue fasse une révolution entière, et que la puissance en parcoure toute la circonférence. Donc les espaces décrits en *même temps* par les deux forces, sont *directement* comme les rayons du cylindre et de la roue ; c'est-à-dire que les vitesses sont encore ici en *raison inverse* des masses.

4. *Du Cabestan, de la Grue, de la Chèvre.*

Il y a un grand nombre de machines qui se rapportent au treuil, telles sont le *cabestan*, la *chèvre*, la *grue*, etc. Dans le cabestan, le cylindre où s'enveloppe la corde qui tient au fardeau, est dans une position verticale, et la puissance agit dans le sens horizontal, appliquée à des léviers, qui traversent une pièce quarrée dont le cylindre est surmonté. Cette machine est employée pour amener de lourds fardeaux sur un plan horizontal, ou peu incliné à l'horizon. Comme les deux forces tendent à faire tourner le cylindre en sens contraires, l'équilibre

exige qu'elles soient entre elles *réciproquement* comme leurs distances à l'axe du cylindre. C'est la même condition qu'on a déjà établie.

Pour maintenir le cylindre dans sa position verticale, et empêcher qu'il ne soit entraîné, on l'engage entre de fortes pièces de bois bien assemblées, et retenues d'une manière solide par le moyen d'un gros piquet profondément enfoncé dans le sol.

Dans la *chèvre* et la *grue* qui sont destinées à élever de grosses masses à des hauteurs plus ou moins grandes, le cylindre est horizontal, et la corde qui se roule sur ce cylindre, passe sur une ou plusieurs *poulies de renvoi* qui ne changent rien aux conditions de l'équilibre, ni à la grandeur de la pression que supportent les appuis. Dans la *grue*, la roue ou les roues doivent faire équilibre par leur poids à une longue pièce de bois, qui s'élève obliquement, et porte les poulies de renvoi. Le tout est mobile dans le sens horizontal sur un fort pivot, afin de pouvoir poser les masses élevées à la place qui leur est destinée.

5. *De la grue à tambour.*

Les roues des grues ont assez souvent la forme de cylindres creux ou tambours, dans lesquels sont renfermés des hommes, qui en posant les pieds successivement sur des traverses également espacées comme pour avancer, font tourner ces roues sur elles-mêmes, et parviennent ainsi à vaincre la résistance donnée.

Lorsque plusieurs hommes sont renfermés dans la même roue, leur action se fait sentir à des distances inégales de l'axe, et l'avantage qu'ils procurent à la

puissance, n'est pas le même pour tous. Mais il est facile d'en déterminer la valeur pour chacun en particulier, et de trouver dans tous les cas la grandeur absolue de la puissance soit par le calcul, soit par une simple construction.

Supposons que ABC (fig. 76) représente le quart du tambour, dans lequel sont renfermés *quatre* hommes, l'un en M, le second en M', le troisième en M'', et le quatrième en M'''. Comme ces hommes n'agissent que par le poids de leurs corps, si des points où ils sont placés, on élève les verticales MP, M'P', etc., leur action sera évidemment la même que s'ils étaient appliqués aux points P, P', P'', P''' du rayon horizontal de la roue. Maintenant si l'on suppose que les arcs AM, MM', etc. sont chacun de *quinze* degrés, les parties CP, CP', CP'', CP''' qui expriment les distances au point fixe, seront les *sinus* des arcs de 15, 30, 45, et 60 degrés; et le poids moyen d'un homme étant supposé de 150 livres, il faudra pour avoir la somme des momens, multiplier ce poids par la somme des sinus de ces arcs. Or le rayon de la roue étant pris pour l'*unité*, les sinus des arcs en question, exprimés en *centièmes*, sont de 26, 50, 71, et 77, qui ajoutés ensemble donnent *deux entiers* et 24 *centièmes*. En multipliant 150 par ce nombre, il vient 336. C'est là la valeur totale de la puissance. Ces quatre hommes sont équivalens à un poids de 336 livres appliqué perpendiculairement à l'extrémité B du rayon BC. Si donc le rayon de la roue est *douze fois* plus grand que celui du cylindre où s'enveloppe la corde du fardeau, il faudra multiplier le dernier nombre par 12; ce qui donne enfin 4032 livres

D'abord la poulie et son pignon peuvent être considérés comme un treuil, la puissance agissant suivant une tangente à la circonférence de la poulie, et la résistance se faisant sentir perpendiculairement à la circonférence du pignon. Si l'on désigne cette résistance par Q, et qu'on nomme R et r les rayons de la poulie et du pignon, on aura ici, en vertu de ce qui a été établi plus haut : la puissance P *est à* la résistance Q, *comme* le rayon r du pignon *est* au rayon R de la roue.

En second lieu la résistance Q que le pignon a éprouve de la part de la roue B, doit à son tour être considérée comme une puissance appliquée à la circonférence de cette roue, et qui est en équilibre avec la résistance qu'oppose la roue C au pignon b. C'est donc ici comme un second treuil, qui nous donnera ainsi que le premier, et en faisant usage des mêmes lettres accentuées pour désigner des choses semblables : la puissance Q *est à* la résistance Q', *comme* le rayon r' du pignon b *est au* rayon R' de la roue B.

Enfin la troisième roue C sollicitée par la force Q', doit tenir en équilibre le fardeau M au moyen du cylindre c : ce qui exige qu'on ait : la force Q' *est* au fardeau M, *comme* le rayon r'' du cylindre *est au* rayon R'' de la roue C.

Maintenant si l'on remonte de la dernière condition d'équilibre à la première, en mettant à la place des forces Q' et Q les valeurs que celles-là fournissent, on trouvera pour résultat général que l'équilibre a lieu dans le système que nous considérons ici, lorsque la puissance première *est à* la résistance dernière, *comme* le produit des rayons de tous les pignons ou cylindres *est* au produit des rayons de toutes les roues ou pou-

lies. Ainsi en supposant pour le cas qu'on vient de donner en exemple, que le rayon de chaque roue soit *dix fois* aussi grand que celui de son pignon, *une livre* suffirait pour faire équilibre à un poids de *mille livres.*

Quant à la charge que supportent les axes de ces trois roues, elle est différente pour chacune d'elles. L'axe de la première roue A ne peut dans le cas présent que supporter une pression de *onze livres*; puisqu'il est dans la même circonstance, qu'un lévier simple qui tiendrait en équilibre deux forces, l'une de *dix livres*, et l'autre d'*une livre.* En raisonnant de même on trouvera que l'axe de la seconde roue soutient un effort de 110 livres; et qu'enfin celui de la troisième supporte une pression totale de 1100 livres. Si l'on ajoute ensemble les pressions qui se font sur les axes des trois roues, on trouve que leur somme est plus grande que les valeurs absolues de la puissance et de la résistance, ce qui n'arrive jamais dans le lévier simple. Mais si l'on fait attention que la pression dans la deuxième roue se fait en sens contraire de celles qui ont lieu sur les axes de la première et de la troisième, alors on verra qu'en retranchant celle-là de la somme de celles-ci, il reste pour exprimer la pression dans le dernier sens 1001 livres, c'est-à-dire une quantité égale à la somme des forces absolues qui agissent sur le système. Nous aurions pu faire la même observation au sujet des léviers composés.

2. *Puissance des roues dentées, et source de cette puissance.*

D'après ce qu'on vient de voir, les roues dentées peuvent se rapporter aux léviers composés, et il est peu de machines qui soient aussi favorables à la puissance que celle-là. Mais il est aussi facile de sentir et de prouver que ce grand avantage ne peut s'obtenir qu'aux dépens du temps ou de la vitesse. En effet lorsque la première roue A fait une révolution, le pignon *a* qu'elle porte, fait aussi un tour sur lui-même ; et si l'on conçoit que ses ailes aient une hauteur infiniment petite, ainsi que les dents des roues, de manière que le mouvement se communique par le frottement des circonférences, lorsque le pignon *a* aura fait un tour, la roue B n'aura fait qu'une partie de sa révolution égale à la circonférence de ce pignon ; elle n'aura donc fait qu'*un dixième* du chemin de A, si le rayon de *a* est *dix* fois plus petit que celui de A : ainsi pour que la roue B fasse *une* révolution entière, il est nécessaire que la poulie A et son pignon en fassent *dix*. En supposant le même rapport entre le rayon du pignon *b* et celui de sa roue, la roue C n'aura achevé *une* révolution sur son axe, que lorsque la roue A en aura fait *cent*; et enfin si le rayon du cylindre *c* est encore la *dixième* partie du rayon de la roue C, le fardeau ne sera monté d'*un pied*, qu'autant qu'un point de la circonférence de la poulie A aura parcouru *mille pieds*. En général les vitesses virtuelles sont encore ici en *raison inverse* des masses, et par conséquent la vitesse de la résistance *est à* la vitesse de la puissance, *comme* la grandeur absolue de celle-ci *est à* la grandeur de celle-là.

3. *Transmission du mouvement par les roues dentées.*

Les roues dentées sont surtout employées pour transmettre le mouvement ; et dans cet usage on a pour objet en général ou d'*accélérer* le mouvement primitif, ou de le *ralentir*. Dans le premier cas ce sont les roues qui *mènent* les pignons : dans le second ce sont au contraire les pignons qui *mènent* les roues. Dans tous les cas lorsque le mouvement se fait dans un même plan, ou dans des plans parallèles, deux roues qui se suivent, tournent toujours en sens contraires. Il s'agit à présent de déterminer le nombre des révolutions de la dernière roue, lorsque l'on connaît celui de la première roue ou du premier pignon.

Soit donc un système (fig. 79) composé de deux pignons et de deux roues, disposé de manière que le pignon et la roue extrêmes aient chacun leur axe particulier, tandis que la roue et le pignon moyens sont tous deux sur un même axe. Si l'on suppose que la puissance est appliquée à la première roue C, et qu'elle lui fait faire un tour entier en un certain temps ; on aura aisément le nombre de tours que fait le dernier pignon dans ce même temps, pourvu que l'on connaisse d'avance le nombre des dents des deux roues C et D, et le nombre des ailes des deux pignons *b* et *a*. Donnons pour exemple, 80 dents à chaque roue, et 8 ailes à chaque pignon. Un raisonnement et un calcul pareils à ceux qu'on a faits tout à l'heure, nous apprennent que le dernier pignon fera *cent* révolutions, dans le temps que la première roue mettra à

achever *un* tour sur elle-même. Quand celle-ci fait un tour, les ailes du pignon *b* passent *dix* fois, et la roue D qui est sur le même axe fait *dix* révolutions. Pour la même raison, quand celle-ci en fait *une*, le pignon *a* tourne *dix fois* sur lui-même, et par conséquent *cent* fois dans le temps que la roue C achève elle-même *une* seule révolution. Le mouvement va donc en s'accélérant de C en *a*, et d'autant plus qu'il y a plus de différence entre les nombres des dents des roues et des ailes des pignons.

En général *le nombre des révolutions du dernier pignon* est au *nombre des révolutions de la première roue*, comme *le produit des nombres des dents de chaque roue* est au *produit des nombres des ailes de chaque pignon.*

Si la puissance était appliquée à la circonférence du pignon *a*, et que le mouvement se transmît par son moyen jusqu'à la roue C, l'effet serait opposé au précédent, et le mouvement se ralentirait de plus en plus à mesure que le nombre des dents des roues surpasserait davantage le nombre des ailes des pignons. Dans notre exemple tandis que le pignon *a* fait *un* tour, la roue D ne fait qu'*un dixième* de révolution, de même que son pignon *b*; et pour une pareille raison, la roue C ne doit faire qu'*un centième* de tour dans le même temps.

On peut donc par le moyen des roues dentées accélérer ou ralentir à volonté un mouvement donné : mais il y a quelques observations à faire sur ce sujet. D'abord le nombre des dents qu'on peut tailler sur la circonférence d'une roue, quoique arbitraire en quelque sorte, dépend néanmoins de la grandeur de cette circonfé-

rence ; et lorsqu'on est limité par l'espace, là roue ne pouvant excéder une certaine grandeur, elle ne peut par conséquent admettre qu'un certain nombre de dents. Comme les dents d'une roue doivent avoir une force suffisante pour résister à la pression qu'elles éprouvent continuellement, on est dans l'usage de ne tailler au plus que 100 ou 120 dents sur la circonférence d'une roue. D'un autre côté les pignons ne peuvent aussi porter qu'un nombre d'ailes proportionné à leur diamètre ; et de plus il est nécessaire que les ailes des pignons soient justement taillées pour les intervalles que les dents des roues laissent entre elles ; de manière que toutes les pièces du rouage n'éprouvent aucune gêne, et qu'il n'y ait aussi point de jeu, et point de perte de temps. Il faut encore pour la justesse et pour la perfection d'un rouage, que pendant tout le temps que l'aile du pignon est en prise avec une dent de la roue, elle exerce sur celle-ci une pression égale sans choc et sans saccade ; ce qui exige que l'on donne aux ailes des pignons et aux dents des roues une certaine courbure, qui est assez difficile à bien saisir, et qui exige les soins d'un artiste exercé. La courbe dont on fait usage pour ceci, est celle que les géomètres appellent *hyperbole.*

4. *Description des montres de poche.*

C'est ici le lieu de faire connaître la construction de ces machines ingénieuses, devenues aujourd'hui si communes, qui nous servent à mesurer le temps, et qu'on appelle *montres de poche.* On se rappelle que le principe moteur de ces horloges est un ressort roulé

sur lui-même, et logé dans un cylindre ou tambour, qu'il fait tourner en se développant, et par le moyen duquel il communique le mouvement à toutes les pièces du rouage. On a expliqué par quelle admirable invention on était parvenu à régulariser le développement de ce ressort. On doit se souvenir que la fusée repose par sa base sur une roue dentée, qui tourne avec elle, et met en mouvement toutes les autres pièces. Les choses sont disposées de manière que le ressort fait faire à la fusée une révolution sur elle-même en *quatre* heures de temps. Le pignon que mène cette roue, n'ayant que le *quart* du nombre des dents de la roue, fait donc *un tour en une heure*. L'axe de ce pignon porte l'aiguille des minutes, qui fait ainsi le tour du cadran dans l'espace d'*une heure*.

La fusée comme on l'a expliqué plus haut, ne suffisant pas pour donner au développement du ressort toute la régularité nécessaire, on a ajouté un *balancier* dont les palettes s'engagent alternativement entre les dents *obliques* d'une roue, qui s'appelle *roue de rencontre*. Celle-ci a un nombre impair de dents, afin qu'il n'y ait jamais qu'une palette du balancier qui soit engagée à la fois, et qu'elles soient ainsi poussées successivement, et l'une après l'autre. Le balancier est sans cesse ramené par un petit ressort délié, tourné en spirale, et qui lui fait faire des oscillations continuelles. Le nombre de ces oscillations est ordinairement de 17280 *dans une heure*.

La roue des minutes fait, comme on a dit, un tour entier dans le temps d'une heure; et comme c'est la force dont elle est animée, qui doit imprimer le mouvement au balancier, on lui donne à mener plusieurs

roues et pignons, dont les dents et les ailes sont calculées de manière à produire l'effet désiré. Les pignons sont au nombre de *trois*, et il y a *quatre* roues en y comprenant la roue des minutes dont le nombre des dents n'a point encore été déterminé. Or si l'on applique ici la règle établie pour trouver le nombre des tours de la dernière roue pendant que la première en fait *un*, on voit que les ailes des *trois* pignons, et les dents des *quatre* roues doivent être tellement combinées, qu'en *divisant* le produit des dernières par celui des autres, on trouve pour résultat le nombre 17280. Mais cela peut se faire d'un grand nombre de manières différentes; et l'on serait par conséquent ici dans un assez grand embarras, si l'on ne faisait attention qu'un pignon ne peut guère avoir moins de *six* ailes, ni une roue plus de *cent* dents. En donnant donc *six* ailes à chaque pignon, notre diviseur sera 216: et en multipliant par là le nombre 17280, on aura 3732480, qu'il faut décomposer en *quatre facteurs* tous plus petits que 100. Un court tâtonnement donne pour ces facteurs ou les nombres 48, 36, 40 et 54; ou bien les nombres 54, 48, 48 et 30. On peut donc donner 48 dents à la roue des minutes, 36 à la roue suivante, 40 à la troisième, et 27 seulement à la roue de rencontre, parce que chaque dent de celle-ci fait faire deux oscillations au balancier. La seconde combinaison de dents serait également bonne. On aurait trouvé d'autres nombres, si l'on avait donné aux pignons un nombre d'ailes différent. Voilà donc déterminé tout ce qu'il faut pour que le balancier fasse en une heure de temps le nombre d'oscillations convenu.

S'il n'y avait dans une montre que les pièces dont on

vient de parler, la montre ne marquerait que les minutes, ou les sous-divisions de l'heure, sans faire connaître l'heure elle-même. Il fallait donc d'autres roues, dont le mouvement fût suffisamment ralenti, pour que la dernière ne fit une révolution entière qu'en *douze heures* de temps, ou un demi-jour. C'est à quoi l'on est parvenu par le moyen de *deux* autres roues et de *deux* pignons cachés sous le cadran. Sur l'axe de la roue des minutes est fixé un premier pignon qui tourne avec cette roue, et qui engrène dans une autre roue située à côté du pignon, et dans le même plan. Celle-ci porte le second pignon, qui mène à son tour la seconde roue placée au-dessus de la roue des minutes, et qui est percée à son centre d'un trou rond, pour laisser passer l'axe de cette dernière roue. Sur le bord de ce trou circulaire, est soudé un cylindre creux, ou *canon* qui est destiné à porter l'aiguille des heures. Par ce moyen les deux aiguilles sont libres et indépendantes, et elles tournent sur le cadran autour du même centre.

Tout ce qui reste à faire pour achever la construction de notre montre, c'est de déterminer le nombre des dents des deux dernières roues, et celui des ailes des deux pignons, pour que le premier pignon faisant un tour en *une heure*, la dernière roue n'achève son tour qu'en *douze heures* de temps. Or il y aurait encore pour cela bien des moyens. Il est vrai qu'ici l'on est assujetti à une condition particulière, c'est que la distance des centres du premier pignon et de la première roue doit être la même que celle du second pignon et de la seconde roue; ce qui fait que les nombres à choisir pour les deux, doivent être peu différens entre eux. Ainsi l'on fera les pignons l'un de *dix*

ailes, et l'autre de *douze* : les roues auront, l'une 40 dents, et l'autre 36. Par ce moyen la dernière roue ne fera qu'*un douzième* de révolution dans *une heure*, c'est-à-dire, qu'elle achèvera une révolution entière, et que l'aiguille qu'elle porte fera le tour du cadran en *douze heures* de temps. Telle est la composition ordinaire des montres, et l'on doit concevoir actuellement comment ces petites machines peuvent servir à donner la durée des différentes parties du temps.

5. *Problèmes à résoudre.*

C'est en faisant usage des principes établis dans ce Chapitre, et en imitant ce qu'on vient de pratiquer, qu'on peut résoudre quelques problèmes curieux relatifs au temps. *Trouver*, par exemple, *le nombre des dents qu'il faudrait donner aux différentes pièces d'un rouage, qui étant mené par un pignon fixé sur la roue des heures, ne ferait faire qu'un seul tour à la dernière roue pendant le cours d'une année commune, c'est-à-dire en* 365 *jours*, 5 *heures*, 49 *minutes.*

Le pignon placé sur l'axe de la roue des heures, ne fait qu'un tour en 12 heures ; et la dernière roue du rouage demandé doit achever sa révolution en 8765 heures et 49 *soixantièmes* d'heure. Il faudra donc à celle-ci $730 \frac{149}{720}$ heures pour faire la *douzième* partie de sa révolution, tandis que le pignon moteur fait en *une heure* un *douzième* de tour. Si l'on veut donc résoudre le problème proposé en employant seulement *trois* pignons et *trois* roues, il faudra ici comme précédemment que le produit des dents des roues *divisé* par le produit des ailes des pignons donne le nombre $730\frac{149}{720}$,

qui exprime le rapport des deux vitesses extrêmes dans le même temps. Maintenant puisque les dents des roues sont nécessairement des nombres entiers, pour que la fraction qui est dans le rapport disparaisse, il faut que le produit formé avec les nombres d'ailes des pignons, soit égal à 720, pris *une* ou *plusieurs* fois. Faisons-le égal à 720 ; et puisqu'il doit y avoir *trois* pignons, décomposons ce nombre en *trois facteurs* qui ne soient ni trop grands ni trop petits. Ceux qui se présentent de suite, sont les nombres 8, 9, et 10. Ces trois nombres conviennent parfaitement pour les ailes des pignons : on pourra donc employer trois pignons, dont le premier aura *huit* ailes, le second *neuf*, et le troisième *dix*.

Les nombres des ailes des pignons étant déterminés, il faut à présent déterminer de même ceux qui conviennent aux dents des roues. Si l'on multiplie 730 par 720, et qu'on y ajoute 349, on aura le nombre 525949 pour exprimer le produit des nombres des dents des trois roues ; et il est nécessaire que ce nombre soit aussi décomposable en trois facteurs, d'une grandeur qui puisse convenir pour notre objet. Or cette décomposition ne peut pas se faire sans une petite inexactitude ; de façon que le problème proposé ne peut pas être résolu avec une rigoureuse précision. Mais il peut l'être avec une approximation bien suffisante ; et au moyen de trois roues de 50, 78 et 81 dents, combinées avec les pignons ci-dessus, il n'y aurait d'erreur que *quatre minutes en moins.* L'erreur sera moindre encore si l'on prend trois pignons de 7, 7 et 8 ailes, et trois roues de 50, 69 et 83 dents ; il ne s'en faudra alors que de la 49.ème partie d'une minute que la solution ne soit tout-à-fait exacte.

Pour second problème de ce genre, on peut chercher quelle combinaison de roues et de pignons serait propre à donner les *phases de la* lune, en prenant pour premier moteur un pignon placé sur la tige de la roue des minutes. Un rouage propre à produire cet effet, devrait être composé de *quatre* pignons, ayant 4, 6, 13 et 17 ailes, et de *quatre* roues portant 37, 41, 42 et 59 dents. Tout ceci au reste explique suffisamment la construction de toutes les sortes de montres de poche et d'horloges ou pendules, de même que celles des machines appelées *planétaires* ou *orréries*, dans lesquelles on représente une grande partie des mouvemens célestes, et où au moyen d'une simple manivelle, l'on fait tourner à la fois les planètes autour du soleil, la terre sur elle-même, et la lune autour de la terre, dans des temps assez exactement proportionnels.

6. *Du Cric.*

Il y a beaucoup de machines dans la composition desquelles entrent les roues dentées. Une des plus communes et des plus utiles c'est le *cric*. Celle-ci se compose d'une lame de fer armée de dents comme un rateau. Un pignon engrène entre ces dents, et se meut au moyen d'une manivelle. Le fardeau qu'il faut soutenir ou élever, est supporté par la tête de la barre de fer, ou par un talon dont elle est garnie à sa partie inférieure. La puissance étant ici appliquée à la poignée de la manivelle, et la résistance se faisant sentir contre les ailes du pignon qui engrène le rateau, on a donc pour l'équilibre : la puissance *est à* la résistance, *comme*

le rayon du pignon *est au* rayon de la manivelle. Si ces rayons sont dans le rapport d'*un* à *dix*, un effort de *dix* livres soutiendra un poids de *cent* livres. Mais comme le fardeau doit ordinairement être soutenu à une certaine hauteur pendant un temps plus ou moins long, et que la force de l'homme s'épuise assez promptement, on empêche le rateau de rétrograder, au moyen d'un *cliquet* qni s'engage dans les entailles d'une espèce de roue qui est portée par l'axe du pignon.

Lorsqu'on veut avoir un cric plus puissant, on ajoute une roue dentée et un second pignon ; et alors la puissance *est à* la résistance, *comme* le produit des rayons des deux pignons *est au* produit du rayon de la roue par le rayon de la manivelle. Dans ce cas le fardeau s'élève avec plus de lenteur.

L'avantage que la puissance peut tirer des roues dentées, paraît être illimité. Mais il faut observer qu'outre l'obstacle qu'oppose le frottement qui va croissant avec le nombre des roues, l'extrême lenteur avec laquelle on obtient par ce moyen l'effet desiré, est un motif suffisant pour ne pas multiplier cette sorte de roues au-delà d'un certain nombre, au moins lorsqu'elles sont employées pour mettre en mouvement une résistance donnée.

CHAPITRE XII.

DU PLAN INCLINÉ.

Nous avons déjà parlé du *plan incliné*, lorsque nous avons traité de la pesanteur. On a vu alors que lorsqu'un corps pesant était appuyé sur un plan incliné à l'horizon, la pesanteur n'avait sur lui qu'une partie de son effet ; et que cette partie était d'autant plus petite, que le plan s'éloignait moins de la position horizontale. Nous allons considérer ici le plan incliné comme une machine, au moyen de laquelle deux forces inégales peuvent être mises en équilibre.

1. *Condition d'équilibre quand la puissance est parallèle au plan.*

Soit un corps pesant M (fig. 80) appuyé sur le plan incliné AB, et qu'une puissance P doit tenir en équilibre : il s'agit de trouver le rapport que cette puissance doit avoir avec le poids du corps M, pour obtenir l'effet desiré. Ce rapport, comme il est évident, dépend en partie de la direction suivant laquelle la puissance exerce son action. Si du centre de gravité G de la masse M, on abaisse la verticale GR, cette verticale nous donnera la direction de la pesanteur : mais comme le corps ne

peut pas suivre cette droite, et qu'il est contraint pour obéir à la force qui le sollicite, de glisser ou de rouler le long du plan, il est clair que ce qui convient le mieux à la puissance pour anéantir ce dernier effet, est d'agir dans un sens *parallèle à la longueur de ce plan.* Tout ce qu'il faut alors de force pour soutenir la masse en question, est mesuré par ce que nous avons appelé la *pesanteur relative.* Or celle-ci, comme on a vu, *est à la pesanteur absolue, dans le rapport de la hauteur du plan à sa longueur.* Ce sera donc aussi là le rapport entre l'effort que la puissance doit faire, et le poids de la masse à soutenir ; et comme la hauteur du plan est toujours plus petite que sa longueur, cet effort sera toujours moindre que le poids du corps, pourvu que l'action se fasse parallèlement à la longueur du plan.

On peut vérifier mécaniquement la chose, en employant un plan incliné de bois ou de métal, et un petit chariot très-mobile qui peut rouler le long du plan sans éprouver de frottement sensible. Le chariot est retenu par un cordon, qu'on peut rendre parallèle au plan, et qui va passer sur une poulie de renvoi fixée à sa partie supérieure. On attache à ce cordon les poids nécessaires pour tenir le chariot en équilibre ; et l'on remarque que si la hauteur du plan est la *moitié*, ou le *tiers*, ou le *quart* de sa longueur, le poids du chariot et de sa charge étant supposé d'*une livre*, il ne faut pour l'empêcher de descendre que la *moitié*, ou le *tiers*, ou *le quart d'une livre.* Il y a donc équilibre dans le plan incliné, et dans le cas du parallélisme, lorsque les deux forces sont entre elles *comme* la hauteur et la longueur du plan.

Si l'on voulait rapporter le plan incliné au lévier, on le pourrait faire aisément, en abaissant du centre de

gravité de M une perpendiculaire GD sur le plan ; et considérant la puissance P comme appliquée à ce même centre de gravité, GD serait un lévier ayant en D son point d'appui, tandis que les deux forces qu'il doit mettre en équilibre agissent toutes deux sur le point G, mais l'une dans le sens vertical GR, et l'autre dans le sens GK parallèle au plan. Les perpendiculaires abaissées du point d'appui sur ces deux directions, sont ici DE et DG. L'égalité des momens nécessaire pour l'équilibre donne donc : la puissance *est à* la résistance, *comme* DE *est à* DG. Mais ces lignes sont entre elles dans le même rapport que la hauteur du plan et sa longueur. Cette considération nous conduit donc au même résultat que nous avons eu tout à l'heure.

2. *La puissance étant parallèle à l'horizon.*

Si la puissance agissait dans une direction autre que celle qu'on vient de supposer, alors elle ne serait plus directement opposée à la pesanteur relative ; et une partie de cette puissance ne pouvant contribuer à l'effet désiré, il suit qu'elle devra être plus grande que dans le cas précédent.

Supposons par exemple, que la puissance agit (fig. 81) suivant une droite parallèle à l'horizon, ou à la base du plan incliné. Pour connaître quelle sera la partie *efficace* de cette puissance, il faut la décomposer en deux forces, l'une *perpendiculaire* au plan, et par conséquent perdue, et l'autre *parallèle* à ce plan, et qui sera employée à retenir le corps. La pesanteur relative étant représentée par GF, on prendra donc GE égale et opposée à GF ; et du point E on abaissera une perpendiculaire au plan, qui rencontrera en K la droite

horizontale GP, et déterminera ainsi la grandeur GK de la puissance P nécessaire pour tenir en équilibre la masse M sur le plan supposé.

Dans le cas que nous considérons ici, on a donc : la puissance *est à* la résistance, qui est la pesanteur relative du corps M, *comme* GK *est à* GE. Mais si l'on compare le triangle GEK avec le triangle ABC qui lui est semblable ; on reconnaît facilement que le rapport de GK à GE est le même que celui de AB à AC. D'un autre côté la pesanteur relative GF ou GE *est à* la pesanteur absolue GD, *comme* la hauteur du plan *est à* sa longueur. Donc en combinant ces deux rapports, on peut dire que dans le cas présent, la puissance *est au* poids du corps, *comme* la hauteur du plan *est à* sa base.

Il suit de là que lorsque la puissance agit parallèlement à la base du plan, elle est moindre que la résistance, tant que la hauteur du plan est plus petite que sa base. Lorsqu'il y a égalité entre l'une et l'autre, la puissance ne peut tenir en équilibre qu'une résistance qui lui est égale ; et enfin elle doit surpasser celle-ci, lorsque la hauteur du plan est devenue plus grande que sa base. La puissance devrait être infinie, si la base du plan devenait nulle, c'est-à-dire si le plan était vertical. En effet dans ce cas la pesanteur du corps M ne peut être détruite par aucune force quelconque qui agirait horizontalement, ou perpendiculairement à la direction de cette pesanteur.

Si l'on veut rapporter les résultats obtenus dans les deux cas qu'on vient d'examiner, les rapporter, dis-je, à l'angle que fait le plan avec l'horizon, on trouvera d'abord pour la force qui agit parallèlement au plan, que cette force est nulle lorsque le plan est horizontal, ou que

l'angle d'inclinaison est nul ; qu'elle devient de plus en plus grande, quoique toujours moindre que le poids du corps, à mesure que l'angle d'inclinaison augmente ; et qu'elle est enfin égale au poids du corps, lorsque cet angle est droit, ou que le plan est vertical. D'un autre côté on trouve pour la force qui agit parallèlement à l'horizon, que cette force est *zéro* sur un plan horizontal, ou dont l'angle est nul. Elle augmente, mais plus rapidement que dans l'autre cas, lorsque cet angle augmente ; et elle est déjà égale à la pesanteur quand l'angle d'inclinaison est de 45 degrés, ou que le plan tient le milieu entre les positions horizontale et verticale. Au-delà de 45 degrés, la puissance doit surpasser la résistance absolue, et de plus en plus à mesure que l'angle est plus ouvert, jusqu'à devenir infiniment grande, lorsque cet angle est arrivé à son *maximum*, ou qu'il est droit.

3. *Pression sur le plan.*

Cherchons maintenant quelle est dans les différens cas la pression que supporte le plan. Si la puissance agit parallèlement à ce plan, il est clair qu'elle ne peut alors contribuer à le comprimer, et que toute la pression que le plan éprouve, est due uniquement à la masse M, qui est tenue en équilibre sur ce plan. Or la composante de la pesanteur perpendiculaire au plan, étant GH (fig. 80), cette ligne représentera toute la pression que le plan supporte dans le cas présent : mais GH *est à* GR qui est la pesanteur absolue, *comme* la base du plan *est à* sa longueur. Donc la pression est ici égale au poids du corps diminué dans le rapport de la longueur du plan à sa base : si celle-ci n'est que la *moitié* de la longueur, le plan ne supportera que la *moitié* du poids du

corps. La longueur du plan est égale à la base, lorsque le plan est horizontal : donc alors la pression est égale au poids total du corps. Lorsque au contraire le plan est vertical, sa base est nulle, et la pression sur ce plan est pareillement nulle.

Dans le cas où la puissance agit parallèlement à l'horizon, ou à la base du plan, on a vu qu'il y avait toujours une partie de la force qui était perdùe pour l'équilibre : mais cette partie de force sert à augmenter la pression sur le plan. Ainsi le plan est comprimé 1.° par une force qui *est au* poids du corps, *comme* la base du plan *est à* sa longueur; 2.° par une autre force qui *est à* la puissance totale, *comme* la hauteur du plan *est encore* à sa longueur. A mesure que le plan s'élève, sa base diminue; et la première partie de la pression diminue aussi. Mais la hauteur du plan diffère toujours moins de sa longueur; une partie toujours plus grande de la puissance, qui elle-même croît de plus en plus, est employée à comprimer le plan; de façon que la pression totale est toujours plus grande dans ce cas que dans le cas précédent.

Au reste, lorsque deux forces sont en équilibre sur un plan incliné, il est nécessaire, et il suffit que la *résultante* de ces deux forces soit perpendiculaire à la longueur du plan : cette résultante exprime donc toute la pression que supporte le plan, et à laquelle il doit faire équilibre par sa résistance.

Examinons encore le cas où la puissance agirait de bas en haut dans la direction de la verticale MP (fig. 82). Comme le corps M n'est sollicité que par la pesanteur relative MD, si l'équilibre a lieu il suffit que la puissance P soit capable de contre-balancer

cette force MD. Si l'on prend donc à partir du point M une quantité ME égale opposée à MD, cette quantité ME représentera l'effort dont la puissance doit être capable dans ce sens pour retenir le corps. Maintenant si du point E on élève sur ME la perpendiculaire EP, qui rencontre en P la direction de la puissance, on aura la droite MP pour représenter la grandeur absolue de cette puissance. Il est facile de voir que MP est égale à MR; c'est-à-dire donc que la puissance dans le cas présent doit être *constamment égale* à la résistance, quelle que soit l'inclinaison du plan. Mais de plus le plan n'a aucune pression à supporter : car une partie de la puissance sert à détruire l'effet de la pesanteur relative sur le corps M, et l'autre partie est employée à annuler la pression sur le plan, comme on le voit aisément par notre figure.

Il résulte de tout ce qu'on a dit ici, que la direction la plus avantageuse à la puissance est celle qui est parallèle à la longueur du plan incliné. Alors il n'y a rien de perdu, et la force toute entière est employée à produire l'effet désiré, qui est l'équilibre du corps sur le plan donné. La chose peut encore se prouver d'une manière expérimentale au moyen de l'appareil décrit ci-dessus, où l'on peut en élevant, ou en abaissant la poulie de renvoi, incliner plus ou moins le cordon à la longueur du plan. Au reste il est facile de s'assurer ici, que si l'équilibre est tant soit peu rompu en faveur de la puissance par exemple, la quantité dont les poids prépondérans descendent verticalement, est plus grande que la hauteur à laquelle s'élève le petit chariot; et en comparant exactement ces deux choses, on trouve encore, que les vitesses dans cette espèce de machine sont en *raison inverse* des masses.

4. *Équilibre sur deux plans inclinés.*

Pour qu'un corps demeure en équilibre sur un plan incliné, il est nécessaire que sa pesanteur relative soit détruite par une force égale et opposée. Mais si le corps s'appuye en même temps sur deux plans inclinés quelconques AB, AC (fig. 83), qui sont situés dans un même plan vertical, dans ce cas l'on pourra trouver une position où le corps sera en équilibre, retenu seulement par la résistance des deux plans. Cet effet aura lieu lorsque l'action de la pesanteur pourra se décomposer en deux forces, qui soient l'une et l'autre perpendiculaires aux plans, et qui de plus doivent rencontrer ces plans en des points qui appartiennent à la surface du corps. Si donc on mène par le centre de gravité du corps une verticale GR, il faudra qu'il y ait sur cette verticale un point K, d'où l'on puisse abaisser les deux perpendiculaires KH et KP qui remplissent les conditions dont on vient de parler.

Les différens *voussoirs* d'une voûte sont des corps appuyés en même temps sur deux plans inclinés, qui sont les voussoirs contigus. Il faut donc que chaque voussoir remplisse ces mêmes conditions.

Si dans la figure 83 on prend GM pour représenter la pesanteur absolue, et que l'on construise le parallélogramme GQMO, on aura GQ et GO pour exprimer les pressions que supportent les plans AB, AC. A la place des lignes GQ, GO, on peut mettre les sinus des angles CAE, et BAF. Ainsi la pression que supporte le plan AB *est à* la pression sur le plan AC, *comme* le sinus d'inclinaison de celui-ci *est au* sinus d'inclinaison

de l'autre. On peut donc toujours déterminer dans une voûte quelle est la pression que chaque voussoir éprouve de la part de ceux qui lui sont contigus. Celui-là comme il est évident, doit pour l'équilibre leur rendre une pression égale. Ces pressions se transmettent donc de l'un à l'autre jusqu'au dernier qui s'appuye sur le terrein, et qui repose sur un plan horizontal, de la part duquel il n'éprouve qu'une réaction morte.

Concevons maintenant deux plans inclinés (fig. 84) adossés l'un à l'autre, et dont les bases sont placées sur une même ligne horizontale. Une poulie étant fixée au sommet commun de ces deux plans, et se trouvant embrassée par un cordon, où sont attachés deux corps appuyés sur ces plans ; on demande quelles sont les conditions nécessaires pour que ces corps soient en équilibre entre eux, les deux cordons étant l'un et l'autre parallèles aux plans. Il est facile de voir qu'il suffit pour cela que les pesanteurs relatives des deux corps soient égales entre elles. Or chaque pesanteur relative *est à* la pesanteur absolue correspondante, *comme* la hauteur du plan incliné *est à* sa longueur. Les deux plans ayant la même hauteur, les pesanteurs relatives des deux corps sont donc en *raison inverse* des longueurs des plans sur lesquels ils s'appuyent, et en *raison directe* des pesanteurs absolues. Donc l'*équilibre aura lieu si les pesanteurs absolues des deux corps sont en raison directe des longueurs des deux plans.*

5. *Usages du plan incliné.*

On est tous les jours témoin de l'avantage considérable que procure la machine du plan incliné. Qu'il soit

question par exemple de faire descendre une pièce de vin dans une cave, ou d'en tirer quelque gros tonneau plein d'un liquide. On sait que le tonneau ayant été amené au pied de la pente par laquelle on veut le faire monter, on passe autour de ce tonneau une corde, qui est attachée par un de ses bouts à un point fixe pris au haut de la rampe, tandis que l'autre bout est attaché à la circonférence d'un cylindre horizontal, placé de même vers le haut, et qu'on fait tourner sur lui-même comme un treuil, au moyen des léviers qui le traversent. C'est ici, comme on voit, une machine composée du lévier, de la poulie mobile et du plan incliné; et il nous sera facile avec les connaissances que nous avons, de trouver quel doit être le rapport de la puissance à la résistance, et de déterminer ainsi l'effort qui est nécessaire pour tenir en équilibre un fardeau connu.

Supposons donc qu'il s'agit de soutenir sur un plan incliné une barrique pesant 1200 livres. La barrique faisant la fonction d'une poulie mobile, ce poids doit se réduire à la moitié, ou à 600 livres, l'autre moitié du fardeau étant supportée par le point fixe où la corde est attachée. De plus si l'on suppose que l'angle d'inclinaison de la rampe soit de 30 degrés, la hauteur du plan incliné sera la moitié de sa longueur; et par conséquent la pesanteur relative du corps n'étant sur cette espèce de plan que la moitié de la pesanteur absolue, les 600 livres seront par-là réduites à 300 livres seulement. Enfin si la longueur des léviers du treuil est *cinq fois* aussi grande que le rayon du cylindre sur lequel se roule la corde, les 300 livres ne demanderont pour être soutenues, qu'un effort de 60 livres appliqué à l'extrémité de ces léviers. En augmentant cet effort,

de tout ce qui est nécessaire pour surmonter les divers obstacles inévitables, et ajoutant seulement quelque petite chose de plus, on pourra faire mouvoir le fardeau, et le tirer de bas en haut. S'il s'agit au contraire de le laisser descendre tout doucement, et d'empêcher qu'il ne se précipite, il faut d'abord diminuer la puissance de tout ce que les résistances accessoires peuvent en effet remplacer ; et après cela une faible réduction de plus suffira pour permettre au fardeau d'obéir à la pesanteur. Mais dans ce cas la puissance doit se renforcer de temps en temps, pour détruire l'accélération que la pesanteur produit toujours, quelque petite que soit l'action qui lui reste.

CHAPITRE XIII.

DE LA VIS.

Les machines simples qui se rapportent au plan incliné, sont *la vis* et *le coin.*

La vis est un cylindre sur lequel rampe en spirale une saillie triangulaire ou quarrée, que l'on appelle le *filet* de la vis : ce filet est dans toute sa longueur également incliné à l'axe du cylindre. L'intervalle entre deux révolutions consécutives du filet s'appelle *le pas de la vis.*

Si l'on développe une des révolutions du filet, de manière qu'elle soit dans un même plan, on formera ainsi un triangle rectangle (fig. 85), ayant pour base la circonférence du cylindre développée, pour hauteur le pas de la vis, et pour longueur une révolution entière du filet. Celui-ci forme donc un plan incliné, dont l'inclinaison est d'autant plus grande, que le pas de la vis est plus petit. La vis nous présente donc un plan uniformément incliné, qui tourne tout autour d'un cylindre.

La vis est faite pour avancer dans le sens de sa longueur; et pour cela on pratique dans un cylindre creux pareil au cylindre solide de la vis, un filet pareillement creux, et en tout semblable au filet saillant de la vis, de manière que l'un s'engage exactement dans l'autre. Cette vis creuse s'appelle l'*écrou*. Quelque fois la vis se meut dans l'écrou qui est fixe, comme dans tous les cas où l'on veut serrer l'une contre l'autre des pièces qui doivent être fortement et étroitement unies. Alors la tête de la vis porte une petite fente, dans laquelle on introduit l'angle d'un outil qu'on appelle *tourne-vis*, et qui sert en effet à la faire avancer en tournant dans l'un et l'autre sens. D'autres fois la vis est fixe, et c'est l'écrou qui se meut sur la vis, au moyen de quelques léviers implantés dans cet écrou, comme on le voit pratiqué dans les étaux des serruriers et dans tous les pressoirs. Au reste l'équilibre entre la puissance et la résistance s'établit de la même manière dans les deux cas.

1. *Condition d'équilibre dans la vis.*

Supposons donc que la puissance est appliquée au lévier dont la tête de la vis est armée, et cherchons

quel doit être son rapport avec la résistance pour qu'il y ait équilibre.

Puisque la vis doit avancer suivant sa longueur, et pousser quelque obstacle devant elle, la résistance se fait donc sentir parallèlement à l'axe de la vis, et elle est censée appliquée au bout du cylindre. Quelle que soit la grandeur de cette résistance, on peut la concevoir divisée en autant de petites résistances partielles qu'il y a de points tournans dans une révolution du filet de la vis. Le point m, par exemple, (fig. 85) éprouve dans le sens paralléle à l'axe, une résistance que j'appelle q, et qui s'oppose à ce qu'il puisse avancer : mais en même temps il est animé d'une force de rotation f, qui lui est donnée par la puissance qui agit sur la vis. Pour que ce point m demeure en équilibre, il est nécessaire, ainsi qu'on a dit, que la résultante des deux forces qui agissent sur lui, soit *perpendiculaire* au plan incliné, c'est-à-dire au filet de la vis. Il faut donc que la force de rotation f, *soit* à la résistance q, *comme* la hauteur du pas de la vis *est à* la circonférence que décrirait le point m, si la vis tournait sur elle-même. (1)

Concevons maintenant une force P qui placée à une distance d de l'axe, soit capable de communiquer au point m la force de rotation f, l'on aura évidemment la proportion : P *est à* f, *comme* r *est à* d ; r étant le rayon de la circonférence décrite par le point m ; ou bien : P *est à* f, *comme* la circonférence qui a r pour

(1) Les deux triangles omf et abc étant semblables, donnent, $mf : of :: ab : bc$; ou $f : q :: ab : bc$. bc est la circonférence de la vis, ou bien celle que décrirait le point m en tournant autour de l'axe.

rayon, *est à* la circonférence dont le rayon est *d*. En combinant entre elles nos deux proportions, on arrive enfin à ce résultat remarquable, que pour l'équilibre dans la vis il faut que *la puissance* soit *à la résistance*, comme *la hauteur du pas de la vis* est *à la circonférence que la puissance tend à décrire.*

On peut arriver au même résultat d'une autre manière encore. Si l'on conçoit que la vis est fixe, et dans une position verticale, et que l'écrou qui doit tourner sur elle, est chargé d'un poids suffisant; il est clair que dans ce cas l'écrou descendra en tournant le long de la vis; et il s'agit de trouver quelle est la force nécessaire pour s'opposer à ce mouvement, en supposant cette force appliquée à l'extrémité d'un lévier horizontal de longueur connue.

Imaginons d'abord que tout le poids de l'écrou, repose sur le point *m* (fig. 86) du filet, et qu'une puissance est appliquée à ce même point agissant dans le sens horizontal. Si l'on se rappelle ce qui a été établi pour ce cas en traitant du plan incliné, on verra de suite que cette puissance pour l'équilibre *doit être* à la résistance, ou au poids de l'écrou, *comme* la hauteur du plan incliné, qui est ici la hauteur du pas de la vis, *est à* la base du plan, qui est la circonférence ayant pour rayon la distance du point *m* à l'axe de la vis. Mais si la puissance au lieu d'être appliquée en *m*, agit en *v* au moyen d'un lévier horizontal, il faut alors la diminuer en même raison que sa distance à l'axe est augmentée, et substituer à la circonférence décrite par le point *m*, celle que décrirait le point *v*; de sorte que l'on a encore ici : *la puissance* est à *la résistance dans le cas d'équilibre*, comme *la hauteur du pas*

de la vis est à *la circonférence que la puissance tend à décrire.*

On a supposé que le poids, ou la charge de l'écrou, ne portait que sur un seul point *m* : mais la démonstration est la même, quand on suppose, comme il est vrai, que cette charge porte en même temps sur plusieurs points. Alors la charge doit se partager en autant de parties égales qu'il y a de points en contact; et la puissance devra de même être considérée comme composée d'un pareil nombre de puissances partielles, de chacune desquelles on pourra dire tout ce qui a été dit tout à l'heure de la puissance unique que nous considérions alors. Donc la somme de ces puissances, ou la puissance qui équivaut à la réunion de celles-ci, *est à* la somme des résistances qui est la charge de l'écrou, *comme* la hauteur du pas de la vis *est à* la circonférence dont le rayon égale la distance du point d'application de la force à l'axe du mouvement.

De la condition d'équilibre qu'on vient de trouver il suit premièrement, que dans des vis différentes, la puissance étant supposée agir à la même distance de l'axe, cette puissance aura d'autant plus d'avantage, que le pas de la vis sera plus petit, et les filets plus serrés. Secondement que pour une même vis, l'avantage de la puissance devient plus grand, lorsqu'on augmente la longueur de son lévier.

Pour que la vis avance d'une quantité égale à la hauteur de son pas, il est nécessaire que la puissance lui fasse faire une révolution entière, et par conséquent qu'elle même décrive une circonférence de cercle d'un rayon égal à sa distance à l'axe. L'on trouve donc encore ici que les vitesses sont *en raison inverse* des masses;

et l'on aurait pu partir de ce principe qui a lieu, comme on voit, dans toutes les machines, pour découvrir la condition d'équilibre dans la vis.

La vis est un instrument capable de produire des effets prodigieux, comme on le voit surtout dans les pressoirs, et dans la machine à *frapper* les médailles et la monnaie. Le pas de la vis étant toujours ici fort petit en comparaison de la circonférence que décrit, ou tend à décrire la puissance appliquée aux léviers, il ne faut pas être surpris si cette puissance est capable de faire par ce moyen des empreintes profondes dans une matière dure comme le bronze ou le platine, et d'exprimer les liquides des corps où ils sont contenus.

Lorsque la vis est employée à serrer deux pièces l'une contre l'autre, il semble qu'aussitôt que la puissance a cessé d'agir, la vis ou l'écrou devrait être repoussé, et rétrograder par conséquent. La chose aurait lieu en effet par la réaction des surfaces pressées, si ce n'était le frottement qui s'oppose à ce retour. Cette espèce de résistance est si grande dans une vis bien faite, qu'elle suffit seule pour maintenir les pièces à leur place, et sans qu'elles puissent avoir aucune disposition à rétrograder.

2. *De la Vis sans fin.*

La vis sans fin (fig. 87) est une machine composée d'une roue verticale dentée, portant sur son axe un tambour ou cylindre, et d'une vis dont l'axe est horizontal, et situé dans le plan de la roue. Au moyen d'une manivelle on fait tourner la vis sur elle-même, entre deux points fixes, sans qu'elle puisse ni avancer ni reculer; mais le filet de la vis qui engrène dans les

dents de la roue, lui communique ainsi un mouvement de rotation suivant son plan. Pendant ce mouvement une corde à laquelle est attaché le fardeau à mouvoir, se roule sur le tambour, et le fardeau s'élève de cette manière.

Il ne sera pas difficile de trouver ici les conditions de l'équilibre. D'abord la puissance étant appliquée à une manivelle, et la première résistance, qui est la roue à faire tourner, se faisant sentir contre le filet de la vis, et parallèlement à son axe ; on trouve par ce qu'on a dit concernant la vis, que la puissance *est égale à* cette résistance *multipliée* par le pas de la vis, et *divisée* par la circonférence que décrit la manivelle. La roue à son tour devant être considérée comme une puissance relativement au fardeau qu'il faut élever, ce qu'on a enseigné à l'occasion du treuil, nous apprend que cette seconde puissance *doit être* à la masse de la résistance, *comme* le rayon du tambour *est au* rayon de la roue. Donc en ayant égard à ces deux rapports, la puissance qui agit sur la manivelle de la vis sans fin, pourra faire équilibre à une masse donnée, si *elle* est *à celle-ci*, comme *le produit du pas de la vis par le rayon du tambour* est au *produit du rayon de la roue par la circonférence que décrit la manivelle.*

Pour faire une application de ce résultat, et donner une idée du grand avantage que cette machine peut procurer à la puissance ; supposons que le pas de la vis ait *un demi-pouce* de hauteur, et que le rayon du tambour soit de *deux pouces;* que la roue ait *dix pouces* de rayon; et qu'enfin la circonférence décrite par la puissance soit de 50 *pouces.* En faisant de ces divers nombres l'usage prescrit par notre règle, on trouve

qu'une puissance d'*une livre* seulement peut dans les circonstances présentes soutenir un poids de 500 *livres*. On voit par-là que la machine dont il est ici question, est une des plus puissantes que l'on connaisse, en même temps qu'elle est une des moins compliquées.

La vis sans fin est néanmoins très-peu employée, à cause que l'énorme avantage qu'on peut en tirer relativement à la force, est compensé par une perte de temps tout aussi considérable. Il faut que la vis fasse un tour sur elle-même, pour qu'il passe une dent de la roue; et par conséquent elle doit faire autant de révolutions que la roue a de dents, pour que celle-ci et le tambour achèvent un tour entier. Si donc la roue porte 126 dents, la manivelle fera 126 révolutions, ou la puissance parcourra 126 fois 50 *pouces*, ou 6300 *pouces*, pour que la résistance monte d'un peu plus de *douze pouces*, qui sont la valeur de la circonférence du tambour. Cela fait *cinq cents* pour *un* : ce qui est aussi le rapport *renversé* des masses. Cette extrême lenteur dans le mouvement du fardeau ne peut convenir que dans très-peu de cas.

3. *Vis d'Archimède.*

Il y a encore une autre machine à laquelle on donne le nom de vis : c'est *la vis d'Archimède*, ainsi nommée du célèbre génie qui l'a inventée. C'est une vis dont le filet est formé d'un tuyau creux, et qui est destinée à élever l'eau à une médiocre hauteur. On l'a décrite avec quelque soin dans l'*Hydraulique physique*. Mais elle pourrait servir aussi à élever un corps pesant, et c'est ce qui nous engage à en parler encore une fois.

Supposons donc un cylindre (fig. 88) autour duquel

tourne *en hélice* une espèce de gouttière, et concevons un corps placé en *m* dans la partie inférieure de la première révolution de l'hélice : ce corps sera retenu en cette place par la pesanteur ; car il ne peut se mouvoir d'aucun côté, sans être obligé de s'élever, ce qu'il ne peut pas faire de lui-même. Mais si l'on fait tourner le cylindre sur son axe dans le sens *mc*, le point *m* sur lequel repose le corps, s'élèvera, et le point suivant qui était plus haut, s'abaissera, sans descendre néanmoins tout-à-fait aussi bas que le point *m*. Il résultera de là que le corps qui ne peut pas suivre le point *m* dans son élévation, sera poussé par celui-ci sur le point suivant, et qu'il avancera ainsi sur l'hélice, et montera en rampant le long du cylindre.

Si le corps était fixé en *m*, il faudrait que la puissance qui fait mouvoir la vis, soutînt une partie du poids de ce corps, à mesure qu'il monterait avec le point *m* ; et comme ce point décrit une circonférence de cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre, le poids à soutenir changerait avec le lieu de la circonférence où se trouverait le point *m*. Quoique le plan du cercle que ce point décrit, soit incliné à l'horizon, il y a deux points néanmoins où *la tangente à ce cercle est parallèle à l'horizon :* ce sont le point le plus élevé et le point le plus bas. Au premier point l'hélice étant au-dessus du corps, n'en soutiendrait aucune partie ; elle le soutiendrait en entier au point le plus bas. La charge de la puissance dans notre supposition irait donc en augmentant pendant une demi-révolution jusqu'à devenir égale au poids du corps ; et elle irait ensuite en diminuant pendant l'autre moitié de la révolution, jusqu'à devenir nulle lorsque le corps serait revenu au point le plus bas.

Si le corps est libre, il pourra bien suivre le point *m* pendant un petit moment : mais bientôt l'élévation de ce point étant plus grande que celle du point subséquent, il arrive que le corps tombe sur ce dernier point ; et comme la même chose se répète à chaque instant, on peut dire que le corps arrive jusqu'au sommet de l'hélice par de petites chutes successives. L'effort que la puissance est obligée de faire pour cela, est seulement celui qui est nécessaire pour pousser un corps d'un poids connu le long d'un plan incliné, ayant pour hauteur la verticale abaissée du sommet de l'hélice, et pour longueur le développement entier de cette hélice. Cette valeur de la puissance doit encore être diminuée à raison de l'avantage que lui procure la longueur de la manivelle à laquelle elle est appliquée : mais cet avantage est acheté par une plus grande perte de temps.

D'après ce qu'on vient de dire, on a pour l'équilibre dans la vis d'Archimède, et en supposant que la puissance soit appliquée à la circonférence du cylindre : *la puissance* est à *la résistance*, comme *la distance verticale entre les deux extrémités de l'hélice*, est au *développement total de cette courbe.*

On pourrait encore dans cette machine considérer le corps comme retenu par un obstacle, et la puissance comme une force employée à pousser sous ce corps un plan incliné de la longueur et de la hauteur qu'on a dites : ce qui ramenerait ce cas à celui de la machine du coin, dont il va être question.

En partant du rapport qui doit dans le cas d'équilibre, avoir lieu entre les masses et les vitesses, on trouverait pour la vis d'Archimède, que *la puissance* est à *la ré-*

sistance, comme *la hauteur dont s'élève le corps dans un certain temps* est à *tout l'espace que parcourt la puissance dans le même temps.* Dans ce rapport se trouve compris ce que la manivelle peut procurer d'avantage. Les deux expressions trouvées reviennent au même ; et l'on voit par l'une et par l'autre, que cette machine est d'autant plus puissante, que les révolutions de l'hélice sont *plus* serrées, et que la force est appliquée *plus* loin de l'axe.

CHAPITRE XIV.

DU COIN.

LE coin (fig. 89) est un prisme triangulaire ayant communément deux faces égales, fait d'une matière dure, et destiné à fendre les corps, ou à les séparer, ou même à soulever un fardeau. On appelle *angle du coin*, l'arête qui joint les deux faces égales, et la face opposée du prisme se nomme *la tête du coin.* Lorsqu'on veut se servir du coin pour fendre, on fait entrer son angle aigu dans une fente déjà commencée, et l'on applique sur sa tête une force convenable.

1. *Equilibre du Coin employé pour fendre.*

Soit donc un coin ABC (fig. 90) engagé dans une fente, et une puissance P qui agit sur la tête du coin au moyen d'un marteau, et qui le frappe dans un sens per-

pendiculaire. Si cela n'était pas, il y aurait une partie de la force qui serait perdue, et il serait toujours facile par la décomposition usitée, d'avoir celle qui agit efficacement, c'est-à-dire celle qui est perpendiculaire à la tête du coin. Soit donc MN cette force efficace. Comme son action se transmet à deux plans inclinés, qui sont les faces latérales du coin, et que ces plans sont soutenus par la résistance des parties du corps qu'il s'agit de fendre ; on décomposera MN en deux forces qui soient perpendiculaires aux faces du coin. Ces deux forces sont ici MK, et ML ou NK. L'on trouvera leur rapport avec la force primitive MN, en considérant d'abord le triangle MNK, et ensuite le triangle ABC, qui est semblable à celui-là ; et on en conclura que *les trois forces sont proportionnelles aux côtés du triangle où elles sont appliquées ;* ou que P *est à* Q *est à* S, *comme* AB *est à* AC *est à* BC.

Le résultat qu'on vient d'obtenir, nous apprend que chacune des forces Q et S est *égale* à la force primitive P multipliée par le rapport de la longueur du coin à sa largeur. Ces forces sont donc d'autant plus grandes que cette largeur est plus petite, ou que le coin est plus aigu.

Supposons maintenant que la tête du coin soit chargée d'un poids tel que la pièce de bois soit sur le point de se fendre jusqu'en O. Dans ce cas ce sera la résistance qu'oppose la partie au-dessous de G qui fera équilibre à cette puissance ; et comme le point fixe est en O, il faudra de ce point abaisser les perpendiculaires OR et OV sur les directions des deux forces, qui sont ici la puissance S, et la résistance R que fait le côté droit du corps. Comme on suppose que l'équilibre a lieu, on aura la force S *égale à* la résistance R *multipliée* par le

rapport de OR à OV ; et en mettant pour la force S la valeur qu'on lui a trouvée tout à l'heure, on verra que la puissance P *est à* la résistance R, *comme* OR multipliant AB *est à* OV multipliant BC. On aura une semblable valeur en considérant la force Q et la résistance que fait l'autre partie du bois.

Tel est donc le rapport que doivent avoir entre elles pour l'équilibre la puissance appliquée sur la tête du coin, et la résistance que lui opposent les parties qu'il s'agit de séparer. Mais comme cette résistance est extrêmement variable, et qu'elle dépend d'une multitude de causes physiques qu'il est impossible de soumettre au calcul, on ne peut pas espérer d'obtenir ici une certaine précision.

2. *Équilibre du Coin employé pour séparer.*

Si le coin (fig. 91) est employé à séparer deux corps, attachés l'un à l'autre par le moyen d'une corde, et retenus par un obstacle placé au-dessous, qui les empêche de descendre ; alors les forces Q et S qui sont représentées par les lignes DL et GH, et dont on a trouvé la valeur précédemment, devront se décomposer chacune en deux forces, l'une suivant la longueur de la corde, et l'autre perpendiculaire à cette longueur, ou plutôt au plan qui sert d'appui aux deux corps. Si donc l'on construit les parallélogrammes MLKD, NGHI, on aura les droites DM et NG pour exprimer les forces qui tendent à séparer les deux corps, et dont l'une seulement, puisqu'elles sont égales, fera connaître *la tension* de la corde qui les tient attachés : les deux droites DK et GI donneront la *pression* que supporte le plan où les corps sont appuyés.

On peut trouver le rapport de ces différens efforts avec la force P appliquée sur la tête du coin, en observant que la force DM, par exemple, est égale à DL, ou plutôt à la force Q *multipliée par le sinus de l'angle ADM*. Mais cet angle est le même que l'angle CAB du coin; et le sinus de celui-ci est égal à la hauteur du coin *divisée* par sa longueur AC. Donc en se rappelant la valeur donnée tout à l'heure pour Q, on trouvera que la force DM est *égale à la puissance P multipliée par la hauteur du coin, et divisée par sa largeur AB*. L'autre force NG étant égale à celle-là, aura la même expression, de même que la tension de la corde. Donc enfin dans le coin l'une des forces latérales *est à* la puissance, *comme* la hauteur du coin *est à* la largeur de sa base. D'où l'on peut conclure encore que la force du coin pour séparer deux corps, est d'autant plus grande qu'il est plus aigu, ou que sa base est plus petite relativement à sa hauteur.

Quant aux pressions sur le plan qui sert d'appui, elles sont encore égales entre elles; et l'une d'elles DK se trouvera en multipliant DL, ou la force Q par le sinus de l'angle DLK, qui est le même que CDK ou ACP. Or le sinus de ce dernier est égal à la demi-base du coin *divisée* par sa longueur AC. En faisant donc usage de la valeur trouvée plus haut pour Q, on aura la pression DK *égale à la moitié de la puissance P*; et de même l'autre pression GI; de façon que la force entière appliquée perpendiculairement sur la tête du coin, se divise sans perte en deux forces égales qui compriment le plan d'appui en deux points différens.

On a dans les cabinets de physique un appareil propre à démontrer à l'œil les résultats que l'on vient d'ob-

tenir. C'est un coin mobile, que l'on peut rendre plus ou moins aigu, et qui est placé entre deux petits rouleaux, auxquels sont suspendus des poids égaux. Lorsque le coin étant chargé suffisamment, descend pour obéir à la pesanteur, il écarte les deux rouleaux, et fait monter ainsi les poids qui y sont attachés. Si l'on compare donc les poids à élever avec la force qui tend à les faire mouvoir de bas en haut, on reconnaîtra que ces choses dans le cas d'équilibre, ont justement entre elles le rapport qu'on vient d'établir; c'est-à-dire que si la hauteur du coin est par exemple, *le double* de la largeur de sa base, une force d'*une livre* suffira pour tenir en équilibre deux poids de *deux livres* chacun. Mais ici l'on peut remarquer encore la confirmation du principe des *vitesses virtuelles* : car lorsque le coin est descendu de toute sa *hauteur*, les rouleaux ne se sont écartés que d'une quantité égale à la *largeur* de la base, et les poids ne sont montés que de *la moitié* de cela.

Les haches, les couteaux, les rasoirs, tous les instrumens tranchans agissent comme des coins : mais pour qu'ils produisent leur effet, il faut les traîner en les enfonçant. Ils commencent donc par déchirer à la manière des scies, et se frayent ainsi une voie pour pénétrer dans les corps qu'on veut diviser. Si l'on frappe une surface plane avec le tranchant d'un couteau, bien perpendiculairement et sans traîner, il arrive ordinairement que la surface n'est pas entamée. On peut même frapper avec le plat de la main sur le tranchant d'un rasoir, sans éprouver aucun accident. Il est visible que la nullité de l'effet vient ici de ce qu'il y a un grand nombre de parties attaquées à la fois, ce

qui leur donne le moyen de résister ensemble à un choc médiocre. Ce ne serait pas la même chose si le coup était donné obliquement : les parties étant alors attaquées les unes après les autres, cèderaient successivement, la surface serait entamée, et l'instrument y pénètrerait sans peine.

CHAPITRE XV.

DES MACHINES COMPOSÉES.

Après avoir fait connaître les machines *simples*, il conviendrait de parler des machines *composées* : mais celles-ci sont en si grand nombre, et tellement variées, que l'examen en serait fort long. D'ailleurs on a fait voir de quelle manière on devait procéder à leur analyse, et comment on pouvait trouver le rapport entre les forces qu'on met en opposition au moyen de ces machines. Ce qu'on a fait à l'égard des roues dentées, de la vis sans fin, de la machine à encaver, qui sont toutes des machines composées, suffit pour montrer la marche que l'on doit suivre dans tous les cas semblables, et comment on peut parvenir à analyser la machine la plus compliquée. C'est pourquoi nous n'en dirons pas davantage à ce sujet, et nous terminerons cette deuxième et dernière Section par quelques consi-

dérations sur le frottement qui se fait dans les machines, et sur l'obstacle qui naît de la raideur des cordes qu'on est obligé d'y employer.

Les machines ont été inventées, moins pour établir entre les forces un équilibre immuable, que pour mettre une puissance en état de vaincre une résistance donnée. Il est vrai que les conditions de l'équilibre étant connues, il est aisé d'en conclure qu'une légère addition faite à la puissance doit suffire pour rendre celle-ci supérieure à la force opposée, et produire du mouvement. Cependant pour que ce dernier effet puisse avoir lieu, il est nécessaire que la puissance soit non-seulement supérieure à la résistance qu'il faut vaincre, mais encore à divers obstacles qui naissent de la nature même des matières dont les machines sont composées, obstacles qu'on doit savoir évaluer dans tous les cas. On peut considérer ces obstacles comme ajoutés à la résistance; et lorsqu'on aura trouvé quelle doit être la grandeur de la puissance pour tenir en équilibre cette résistance ainsi augmentée, c'est alors seulement qu'un petit accroissement de plus à cette puissance suffira pour faire naître et pour entretenir le mouvement.

CHAPITRE XVI.

DU FROTTEMENT DANS LES MACHINES.

On a déja traité plus haut du frottement considéré comme un obstacle au mouvement : on a dit en quoi consistait cette espèce de résistance. On a fait connaître les lois qu'elle paraissait suivre : on a indiqué les moyens d'expérience par lesquels on pouvait dans tous les cas déterminer son rapport avec la pression. Nous n'avons donc ici qu'à montrer de quelle manière on doit avoir égard à cet obstacle, lorsqu'il s'agit d'évaluer la grandeur de la puissance destinée à vaincre au moyen d'une machine, une résistance connue.

Lorsque deux forces sont en équilibre entre elles par l'intermédiaire d'une machine, leur résultante, comme on sait, est dirigée par le point, ou l'axe fixe, autour duquel se ferait le mouvement, si l'équilibre était rompu. Mais lorsque l'une des deux forces doit l'emporter sur l'autre, il est nécessaire que cette résultante tombe en deçà du point fixe par rapport à celle-là ; et il faut ici déterminer de combien elle doit, pour produire le mouvement désiré, s'écarter de ce point, lorsqu'on a égard au frottement.

1. *De l'angle du frottement.*

Soit un corps M (fig. 92) posé sur un plan horizontal, et tiré parallèlement au plan suivant MQ. Si le poids P est tel que le corps M soit sur le point de se mettre en mouvement, ce poids représentera la résistance du frottement qui est ici le seul obstacle; et en le comparant au poids du corps, on trouvera qu'il en est ordinairement *le tiers*, ainsi qu'on l'a dit plus haut.

Maintenant si du centre de gravité de M on abaisse la verticale MN, qu'on prendra pour représenter le poids du corps, et si l'on prend sur l'horizontale MQ la portion MV qui soit *le tiers* de MN, cette portion MN représentera le poids P qui tire le corps; et en achevant le parallèlogramme MVTN, on aura MT pour la résultante des deux forces qui sollicitent ce corps. Comme l'une de ces deux forces est ici égale et opposée à la résistance du frottement, on appelle l'angle MTN, que fait la résultante actuelle avec l'horizon, *angle du frottement*. Cet angle est donc en général celui que la résultante des forces doit faire avec la surface sur laquelle le mouvement doit avoir lieu, pour que ce mouvement soit sur le point de naître.

On peut encore trouver cet angle d'une autre manière. Un corps pesant posé sur un plan horizontal, demeure en repos, parce que la direction de la pesanteur est perpendiculaire à ce plan. Mais si l'on vient à incliner le plan tant soit peu, la pesanteur n'étant plus perpendiculaire au plan, le corps doit glisser de suite et descendre pour obéir à cette force sans cesse agis-

menté, et l'autre diminué du petit angle CMT que l'on a calculé tout à l'heure, et que j'appelle q. On aura donc la proportion : la puissance P *est à* la résistance Q, *comme* le sinus de l'angle (B plus q) *est au* sinus de l'angle (A moins q). On conclura de là la valeur de la force P, lorsque celle de la résistance Q sera connue; et cette valeur de P sera celle que la puissance doit avoir pour être sur le point de prévaloir.

Si les directions des deux forces étaient parallèles, on pourrait supposer qu'elles vont se rencontrer à une distance infinie, et alors les angles eux-mêmes seraient infiniment petits. La proportion ci-dessus devient pour ce cas : la puissance P *est à* la résistance Q, *comme* le rayon du cylindre augmenté de CT *multiplié* par le *cosinus* de f, *est au* rayon de la roue diminué de la même quantité. f est toujours l'angle du frottement qui devra être déterminé par quelque expérience, ou qu'on fera tel qu'on vient de le donner.

3. *Autre manière d'avoir égard au frottement.*

L'on pourrait avoir égard d'une autre manière au frottement qui se fait à la circonférence du boulon. En supposant que cette résistance soit égale à une certaine partie de la pression, on la considèrera comme un nouveau fardeau appliqué à la circonférence du boulon. On transportera ensuite ce fardeau à la circonférence du cylindre, et on l'ajoutera à la charge véritable, en le diminuant dans le rapport du rayon du cylindre au rayon du boulon ; et l'on calculera alors quelle est la puissance, qui agissant à la circonférence de la roue, serait capable de faire équilibre à la somme de ces deux fardeaux. Un léger accroissement dans la

puissance ainsi trouvée, suffira pour produire le mouvement.

Supposons pour donner un exemple, que le poids Q soit de *mille livres*; que le rayon de la roue soit *vingt* fois plus grand que celui du boulon, et que le rayon du cylindre soit seulement *quatre fois* aussi grand; et mettons que le frottement soit *le quart* de la pression, et que les directions des forces soient parallèles entre elles. Dans ce cas l'angle du frottement est de 76 degrés, et son *cosinus* est égal à 24 *centièmes d'unité*, ou un peu moindre qu'*un quart*. En calculant d'après cela la formule donnée ci-dessus, faisant pour simplifier, le rayon du boulon égal à l'*unité*, et le *cosinus* de l'angle du frottement égal à *un quart*, on trouve que la puissance P pour être près de prévaloir, doit être les $\frac{17}{79^{es}}$ de la résistance Q, c'est-à-dire qu'elle doit être égale à 215 *livres*.

En suivant la marche tracée en dernier lieu, on parvient peut-être plus facilement encore, au même résultat. En effet le rapport qu'on a supposé entre le rayon de la roue et celui du cylindre, donne d'abord sans avoir égard au frottement, une puissance de 200 *livres*, pour faire équilibre à un poids de 1000 *livres*. La charge sur l'axe étant comme on sait, dans le cas du parallélisme, égale à la somme des deux forces, il se fait donc ici une pression de 1200 *livres*; et puisqu'on a supposé que le frottement était le *quart* de la pression, cette résistance est dans le cas présent, équivalente à un poids de 300 *livres* appliqué à la circonférence du boulon : elle se réduira au *quart* de cela, ou à 75 *livres*, si on la transporte à la circonférence du cylindre,

Mais cette augmentation de 75 *livres* dans la résistance Q, n'exige dans la puissance P qu'un accroissement de 15 *livres*, ainsi qu'on l'a trouvé par l'autre méthode. On arrive donc au même résultat de l'une et de l'autre manière. Mais la dernière a l'avantage d'être en quelque sorte plus vulgaire, et plus facile à comprendre et à pratiquer.

On n'a eu égard ni dans l'une ni dans l'autre méthode à la pression produite par le poids de la machine : mais il est facile de le faire entrer en considération, et de déterminer d'avance ce qu'il faut de force pour mettre en mouvement cette machine, lorsqu'elle n'a aucun fardeau à élever.

L'exemple qu'on vient de donner, fait voir comment il faut évaluer la résistance du frottement dans la poulie fixe, et dans le lévier qui est traversé par un boulon. Si c'est l'axe de la poulie qui tourne lui-même sur des tourillons, le frottement qui se fait à la surface de ces tourillons, et qui est toujours une certaine partie de la pression, se transportera de même à la circonférence de la poulie, et sera assimilé à un nouveau poids, ajouté au poids qu'il faut mouvoir. Dans la poulie mobile, la pression sur l'axe ayant été déterminée ci-dessus, la valeur du frottement sera facile à connaître. Il en est de même pour les roues dentées : mais dans ces dernières machines il y a un second frottement, qui se fait contre les dents des roues et qui sert à transmettre le mouvement. Celui-ci n'est point un nouvel obstacle, lorsque l'engrenage est bien fait, et que les dents des roues et des pignons sont taillées de manière à s'appliquer sans jeu et sans gêne les unes contre les autres. Ce frottement est d'ailleurs de la seconde espèce, puisque les

parties s'engagent et se dégagent successivement pendant le mouvement.

4. *Du frottement sur les plans.*

Le frottement sur le plan incliné ne présente aucune difficulté. Lorsqu'il est question de faire monter un corps le long d'un plan de cette espèce, il faut que la puissance surmonte non-seulement la pesanteur relative du corps, mais encore la résistance du frottement ; et celle-ci est déterminée par la pression que supporte le plan, et elle en est ou le *tiers*, ou le *quart* suivant les circonstances. Si donc la puissance agit parallèlement à la longueur du plan, elle devra être égale à la somme de ces deux résistances, pour être sur le point de produire du mouvement.

Si un corps étant posé sur un plan incliné (fig. 94), on combine la pesanteur qui le sollicite, avec la résistance du frottement, qu'on peut assimiler à une force active agissant parallèlement à la longueur du plan, et équivalente à une certaine partie de la pesanteur, on trouvera facilement la résultante de ces deux forces dont les grandeurs et les directions sont connues. Si l'on décompose ensuite cette résultante en deux, dont l'une soit parallèle, et l'autre perpendiculaire au plan, l'on aura pour la première, qui est celle à laquelle la puissance doit faire équilibre dans la direction qu'on lui a supposée, la même valeur que ci-dessus.

Considérons encore un plan horizontal (fig. 92). En cherchant de même la résultante du frottement et de la pesanteur, et supposant que la puissance agit dans une direction perpendiculaire à cette résultante,

on reconnaîtra que pour faire mouvoir un corps sur un plan horizontal, la direction la plus favorable est celle qui fait avec le plan un angle d'environ *dix-huit degrés :* ce qu'il est bon de savoir pour déterminer la *ligne de traction* dans les voitures qui ont à traîner de gros fardeaux. Cette observation nous apprend aussi que quand il s'agit de faire mouvoir un corps le long d'un plan incliné, la direction parallèle au plan n'est pas la plus avantageuse à la puissance ; mais bien celle qui est perpendiculaire à la résultante de la *pression* et du frottement.

Si le frottement nuit à la puissance lorsqu'il faut produire du mouvement, il la sert au contraire lorsqu'il s'agit de s'opposer à ce mouvement. Ainsi comme l'observe M.r l'abbé *Marie*, une simple cheville qui frotte contre l'arbre d'un moulin, suffit pour annuler toute l'impétuosité de l'eau ou du vent. On sait avec quelle rapidité augmente le frottement d'une corde qui s'enroule sur un cylindre : il suffit de quelques tours, pour que cette résistance soit supérieure aux plus grands efforts. En général lorsqu'il s'agit de l'équilibre, la puissance peut être moindre de toute une quantité égale à la valeur du frottement, sans que l'équilibre soit rompu, ou que la résistance l'emporte.

CHAPITRE XVII.

DE LA RAIDEUR DES CORDES.

Les cordes dont on se sert dans les machines, opposent encore par leur *raideur* une résistance qu'il faut chercher à évaluer. Voici d'abord la manière de concevoir l'espèce d'obstacle qui vient de cette cause.

Soient deux poids égaux P et Q (fig. 96), suspendus à une corde, et se faisant équilibre au moyen d'une poulie fixe. Tant qu'il n'y aura point de mouvement, les deux parties de la corde AQ, BP, seront tangentes à la poulie en A et en B, aux deux extrémités de son diamètre horizontal. Si l'on conçoit que la poulie vient à tourner sur elle-même dans le sens AFB, les deux cordons seront encore tangens aux points B et A, dans le cas où la corde aurait une flexibilité parfaite. Si au contraire elle n'en avait aucune, comme si elle était faite d'un métal rigide, le poids P dans ce cas serait forcé de rentrer en dedans sous la poulié, et de se rapprocher de la verticale qui passe par l'axe, tandis que le poids Q s'en éloignerait, et se porterait en dehors. L'équilibre serait donc rompu, et pour le rétablir, il faudrait ajouter quelque chose à la puissance P. Or les cordes n'ont ni une flexibilité parfaite, ni une rigidité

absolue ; d'où il suit que dans le cas du mouvement supposé, le cordon BP rentre plus ou moins, et le poids P qu'il soutient, se trouve transporté sous quelque point *b* du rayon horizontal, plus rapproché du centre du mouvement ; au contraire le cordon AQ se courbe en dehors, et le poids qui y est attaché, se place sous quelque point *d* plus éloigné du centre. Il résulte de-là que la puissance P doit être augmentée d'une certaine quantité, pour pouvoir faire équilibre dans cette position à la même résistance Q ; et la quantité dont il faut l'augmenter pour cela, dépend de l'inégalité des distances C*b* et C*d*, c'est-à-dire du plus ou moins de flexibilité de la corde BPAQ.

1. *Loi que suit cette espèce de résistance.*

Le défaut de flexibilité d'une corde vient d'abord de la manière dont elle est fabriquée. On sait que les cordes sont faites de fils tordus ensemble, ou qu'elles sont composées de petits cordons tortillés les uns sur les autres. Or les élémens de la corde étant courbés de différentes manières entre eux, il n'est pas étonnant qu'ils ne puissent pas se prêter également à la force qui tend à les plier tous dans le même sens. C'est de là que vient la raideur naturelle de la corde.

La raideur des cordes est augmentée par différentes circonstances. D'abord la tension que supporte une corde de la part de la puissance qui agit par son moyen, augmente cette raideur ; et l'on a trouvé que cette résistance était *proportionnelle aux poids dont la corde est chargée.*

En second lieu plus la corde a de grosseur, plus on a de peine à la plier. Ainsi la résistance qui vient de la raideur des cordes, est proportionnelle *à une certaine puissance de leur diamètre.* L'expérience a donné *le quarré, ou seconde puissance*, quand la corde est neuve, ou peu usée, et la puissance *trois demis*, quand elle est vieille et fort usée.

Enfin la raideur augmente encore à mesure que le cylindre que la corde embrasse, devient plus petit ; et l'on établit qu'elle est *en raison inverse du diamètre de ce cylindre.* Telles sont les lois que paraît suivre cette espèce de résistance.

Maintenant si par une expérience faite avec soin l'on parvient à connaître la valeur de la résistance, qu'oppose par sa raideur une corde de grosseur connue, embrassant une circonférence dont le rayon est donné, et supportant une charge pareillement connue ; l'on pourra facilement au moyen d'une proportion fondée sur les trois lois qu'on vient d'établir, déterminer la résistance qui résulte de la raideur d'une autre corde dans des circonstances données.

L'expérience a appris qu'une corde de *six lignes*, ou *un demi-pouce* de diamètre, chargée d'un poids de *cent vingt livres*, et embrassant une poulie de *trois pouces* de diamètre, fait par sa raideur une résistance de *huit livres.* Si l'on a donc une corde de *neuf lignes*, ou *trois quarts* de pouces, une charge de *deux cents livres*, et une poulie de *qnatre pouces*, l'on dira : la résistance de cette dernière corde *est à* huit livres, *comme* $\frac{200}{4}$ multipliant $\frac{9}{16}$ *est à* $\frac{120}{3}$ multipliant $\frac{1}{4}$. En faisant les opérations de calcul indiquées ici, on trouve

que la résistance cherchée *est à* celle qui sert de terme de comparaison, *comme* 28 $\frac{1}{8}$ *est à* 10, ou qu'elle est de 22 *livres et demie.* C'est là ce qu'il faut ajouter dans le cas présent à la puissance, pour qu'elle soit en état de surmonter la résistance de la corde, et de produire du mouvement : bien entendu qu'on l'avait déjà augmentée de ce qui est nécessaire pour vaincre le frottement.

FIN.

NOTES.

NOTE (*a*).

Voici quelques problèmes à résoudre relativement au mouvement uniforme.

Deux courriers A et B partent en même temps de deux points éloignés l'un de l'autre de 12 lieues. Ils vont dans le même sens : mais B fait *deux* lieues par heure, et A en fait *deux et demie* dans le même temps. On demande où est-ce que celui-ci qui est le dernier, rencontrera l'autre qui est le premier.

Il est évident que la rencontre demandée se fera, lorsque les deux courriers auront marché assez long-temps, pour que le chemin fait par A surpasse de 12 lieues le chemin fait par B. Or le premier courrier ne gagne sur le second qu'*une demi*-lieue par heûre. Il lui faudra donc 24 heures pour qu'il puisse gagner toute l'avance que celui-ci a sur lui. La rencontre se fera donc au bout de 24 heures : B aura fait alors 48 lieues, et A en aura fait 60. (1)

---

(1) La formule pour tous les problèmes de ce genre est, $t = \frac{a}{v - v'}$. a est l'intervalle des lieux de départ ; v est la plus grande vitesse, v' est la plus petite, et t est le temps au bout duquel la rencontre doit se faire. Le chemin e fait par A jusqu'à cette rencontre est, $e = vt = \frac{va}{v - v'}$, et celui fait par B sera, $e' = \frac{v'a}{v - v'}$.

Si les deux courriers viennent au-devant l'un de l'autre, il faut que la *somme* des chemins qu'ils auront faits en même temps, soit égale à toute la distance qui les séparait. Si cette distance était donc de 100 lieues, en leur supposant les mêmes vitesses que tout à l'heure, on voit aisément que le temps nécessaire est le même, que celui qu'il faudrait pour faire les *cent* lieues, à un seul courrier qui ferait *quatre lieues et demie* par heure. L'on diviserait donc 100 par $4\frac{1}{2}$, et l'on aurait $22\frac{2}{9}$ *heures* pour le temps cherché; c'est-à-dire qu'au bout de ce temps A et B se seraient rencontrés : A aurait fait $55\frac{5}{9}$ lieues, et B en aurait fait $44\frac{4}{9}$; ce qui fait bien 100. (2)

Supposons maintenant que les deux mobiles se meuvent sur une même circonférence de cercle, ou sur des circonférences *concentriques*; alors il pourra y avoir plusieurs rencontres successives, et le temps nécessaire pour que ces différentes rencontres aient lieu, se déterminera facilement par la méthode que nous venons d'employer. Il est visible que les deux mobiles s'étant rencontrés pour la *première* fois, ils sont alors dans le même cas, que s'ils étaient séparés l'un de l'autre par une circonférence entière ; et par conséquent l'on calculera la *deuxième* rencontre d'après cette distance, et l'on fera de même pour toutes les rencontres suivantes. Ainsi on aura le temps à compter

(2) Les formules sont ici, $t = \frac{a}{v + v'}$, $e = \frac{va}{v + v'}$, $e' = \frac{v' a}{v + v'}$.

du commencement du mouvement, pour une rencontre quelconque, en *ajoutant* à la distance primitive *autant* de circonférences qu'il y a eu de rencontres avant celle-là, et *divisant* par la différence des vitesses. Quand les circonférences ayant toujours le même centre, ont des rayons différens, la rencontre est censée se faire lorsque les mobiles sont sur le prolongement du même rayon, et les distances ainsi que les vitesses, doivent alors être exprimées en degrés du cercle. (3)

Au lieu de deux mobiles tournant autour d'un même centre, on peut en considérer un plus grand nombre, et chercher l'époque de leur rencontre générale. Il est visible que le problème sera d'autant plus compliqué, et par suite d'autant plus difficile à résoudre, qu'il y aura plus de corps tournans. Pour nous borner au cas le plus simple après celui que nous avons déja considéré, supposons trois mobiles A, B, C, qui commencent à se mouvoir en même temps avec des vitesses connues, et en partant de différens points dont les distances respectives sont pareillement données. Dans leurs révolutions dont le nombre est censé indéfini, ils se rencontreront tous les trois de temps en temps; et si l'on veut avoir l'époque de la première rencontre générale, il faudra chercher toutes les rencontres successives de A avec B, et ensuite celles de A avec C; et les deux rencontres différentes qui donneront le

---

(3) La formule pour la rencontre $m^{\text{ième}}$ est, $t = \frac{a + (m-1)c}{v - v'}$. Elle serait, $t = \frac{a + (m-1)c}{v + v'}$, si les mobiles allaient en sens contraire; c désigne la circonférence.

même temps, donneront aussi l'époque de la première rencontre générale. (4)

Prenons pour exemple les trois aiguilles d'une pendule à secondes, et supposons-les placées comme il suit : l'aiguille des secondes sur 60 ou o, celle des minutes sur 12, et celles des heures sur 36. Dans une heure de temps, l'aiguille des heures parcourt *cinq* divisions du cadran ; celle des minutes en fait le tour entier, ou parcourt *soixante* divisions ; et celle des secondes en fait *soixante fois soixante* ou 3600. Les vitesses des trois aiguilles exprimées de la manière la plus simple, sont donc : 1, 12 et 720.

Maintenant si nous cherchons la première rencontre de l'aiguille des secondes avec celle des minutes, d'après leurs vitesses et leur distance connues, nous trouverons que cette première rencontre aura lieu au bout de douze secondes et $\frac{12}{59}$ de seconde. Les autres rencontres successives se feront ensuite à des intervalles de temps tous égaux entre eux, et chacun de la durée de 61 secondes et $\frac{1}{59}$. En cherchant de même l'époque où l'aiguille des secondes atteindra pour la

---

(4) Soient A, B, C les trois mobiles, a et a' les distances du premier au second, et du premier au troisième, v, v', v'' leurs vitesses respectives. Les rencontres de A avec B seront données par la formule, $t = \frac{a + (m - 1) c}{v - v'}$, et celles de A avec C, par la formule $t = \frac{a' + (n - 1) c}{v - v''}$. Il faudra trouver pour t deux valeurs égales : elles donneront la solution du problème proposé.

première fois l'aiguille des heures, on trouve que cela doit arriver au bout de 36 secondes et $\frac{36}{719}$ de seconde. Quant aux rencontres subséquentes, elles doivent se faire aussi chacune après 60 secondes et $\frac{60}{719}$. En calculant ainsi les rencontres successives des deux premières aiguilles, et celles de la première avec la troisième, on en trouvera enfin *deux* qui seront arrivées au bout du même temps : c'est la 284e rencontre de l'aiguille des secondes avec l'aiguille des minutes, et la 288e de la première aiguille avec celle des heures. Le temps nécessaire pour cette rencontre commune des trois aiguilles sera d'après leur position primitive, de 288 minutes, ou 4 heures 48 minutes. En effet au bout de ce temps, l'aiguille des heures sera sur 12 h. et celle des minutes sur 60, comme aussi celle des secondes. (5)

---

(5) Le procédé indiqué dans le texte exigerait un long tâtonnement : les méthodes algébriques pour les problèmes indéterminés conduisent plus promptement et plus sûrement au but désiré. On a ici, $t = \frac{36 + (n - 1) 60}{720 - 1} = \frac{12 + (m - 1) 60}{720 - 12}$, ou $\frac{3 + (n - 1) 5}{720 - 1} = \frac{1 + (m - 1) 5}{720 - 12}$. Il s'agit donc de trouver pour m et pour n des nombres entiers qui satisfassent à cette équation. Or on trouvera par les règles connues, que les plus petits nombres qui soient dans ce cas, sont 284 pour m, et 288 pour n. Il est facile d'avoir aussi les autres rencontres subséquentes.

NOTE (*b*).

Quels que soient le nombre et la direction des forces données, on conçoit qu'on pourra toujours décomposer chacune d'elles en *trois forces parallèles* à trois lignes ou *axes* perpendiculaires entre eux. Par ce moyen toutes les forces données seront ramenées à trois systèmes de forces parallèles. Toutes celles qui sont parallèles à l'axe A par exemple, pourront comme on le fait voir dans l'article suivant, se réduire à *une seule.* Il en sera de même de celles qui sont parallèles à l'axe B, et de celles qui le sont à l'axe C. On n'aura donc plus alors à considérer que *trois forces*, qui sont toutes les trois *perpendiculaires* entre elles. Deux de celles-ci peuvent être amenées dans *un même* plan, et alors se rencontrant, elles ont une *résultante* et se réduisent à *une seule* force. Maintenant pour que tout le système puisse avoir une *résultante unique*, il est nécessaire et il suffit que la troisième force qui est perpendiculaire au plan des deux autres, rencontre la résultante de celles-ci en quelque point de sa direction. Si cela n'arrive pas, le système des forces données ne peut pas être ramené à *une seule* force, et il a nécessairement alors *deux résultantes*, qui produisent, comme on a dit, un *double* mouvement dans le corps, au moyen duquel les deux résultantes parviennent à se trouver dans un même plan, et à se réduire enfin à une seule.

NOTE (*c*).

Le problème du *mouvement perpétuel* consiste à trouver une machine qui d'elle-même, et sans le secours

d'aucun agent étranger, puisse quelque part qu'elle soit placée, se mettre en mouvement, et continuer à se mouvoir ainsi toute seule, par le moyen des forces naturelles qui résident en elle. La roue d'un moulin à eau tourne sans cesse; mais son mouvement est produit par l'impulsion d'un agent extérieur : ce sont des molécules étrangères à la roue, qui se succèdent sans interruption, entraînées par la pesanteur, et qui à chaque instant lui communiquent de leur vitesse. Ce mouvement *sans fin* n'est pas le mouvement *perpétuel* en question, parce qu'il est produit par une force qui n'appartient pas à la roue; parce qu'il ne peut avoir lieu que là où il existe un courant d'eau; et si l'on veut, parce qu'il cesserait aussitôt si le courant était tari ou détourné. La machine que l'on demande, doit avoir en elle-même le principe générateur et conservateur de son mouvement. Or ce principe ne peut être que quelqu'une des forces naturelles connues, ou agissant seule, ou concurremment avec quelque autre force semblable.

Ce que l'on a fait de plus ingénieux dans ce genre, c'est la belle invention de l'*échappement* dans les horloges. C'est un poids, comme chacun sait, qui dans ces machines entretient par sa chute lente et successive les oscillations du balancier, et les prolonge bien au-delà du terme qu'elles auraient naturellement; tandis que le balancier à son tour modère et ralentit la chute du poids, qui sans cela se précipiterait en peu d'instans. C'est donc ici la pesanteur qui se sert de correctif à elle-même, et qui trouve en elle de quoi surmonter la résistance des milieux, et celle du frottement. Mais enfin le poids moteur arrive tôt ou tard au point le plus

bas, et il faut alors employer une nouvelle force pour le remonter, et le mettre dans le cas d'agir de nouveau. Mais ne pourrait-on pas imaginer quelque combinaison, au moyen de laquelle ce poids pût s'élever, sans aucun secours étranger, jusqu'à la hauteur d'où il est descendu? C'est en général ce que les chercheurs du mouvement perpétuel ont essayé de faire, et toujours sans succès. Car il est démontré en mécanique qu'un corps tombé d'une certaine hauteur, ne peut jamais par lui-même remonter à toute cette hauteur, à cause des obstacles inévitables qui lui font perdre une partie de sa force. Cependant malgré cette vérité reconnue et non contestée, on a vu dans tous les temps des gens qui ont tenté de construire quelque machine qui pût se mouvoir d'elle-même, et par l'inégale action de la pesanteur sur ses différentes parties.

L'espèce de machine qui a paru la plus propre à résoudre le grand problème du mouvement perpétuel, c'est une roue qui dans toutes les positions qu'elle peut prendre dans un plan vertical, aurait toujours une de ses moitiés plus pesante que l'autre. Il est facile de voir qu'il résulterait de cette construction un mouvement circulaire sans fin. La difficulté a toujours été, et sera toujours de trouver une pareille construction. Quelques-uns avaient cru pouvoir y parvenir, en faisant une roue creuse en forme de tambour, divisant son intérieur par des cloisons, et plaçant dans chaque cellule des poids égaux qui devaient alternativement se porter de la circonférence vers le centre, et du centre à la circonférence. Leur *moment* ou leur action pour faire tourner la roue, devait être plus grand ou plus petit suivant leur position. Mais l'on fit voir que si les poids vers la

circonférence avaient plus de force motrice, ils étaient aussi en moindre nombre que ceux qui étaient de l'autre côté plus près du centre : de sorte qu'ils devaient bientôt se distribuer de part et d'autre de manière qu'il y eût équilibre. Ce moyen qui a été tenté par plusieurs mécaniciens, n'ayant pu donner le résultat attendu, on a essàyé d'y arriver par quelque autre mécanisme, mais en tournant toujours, pour ainsi dire, autour de la même idée.

En 1720 il fut beaucoup question dans le monde savant d'une roue inventée par M.r *Orfiréus* de *Hesse-Cassel*, roue qu'on disait être le mouvement perpétuel. L'on raconte à ce sujet que le Prince de *Hesse*, ayant engagé le célèbre *s'Gravesande* à venir voir cette machine, et à l'examiner, l'inventeur aima mieux la briser, que de la soumettre à l'examen de cet illustre savant. Cette invention ne fut point décrite, et n'a point été imitée. Tout ce qu'on peut présumer à ce sujet, c'est que la machine était fort ingénieuse, et qu'elle était mue par quelque agent secret, que l'œil ne pouvait apercevoir, mais qui n'aurait certainement pas échappé à la sagacité de *s'Gravesande*. La fin de la machine d'*Orfiréus*, et l'oubli où elle est tombée, prouvent suffisamment que cette invention n'était pas, comme le prétendait l'auteur, et comme le crurent alors bien des gens, la solution du problème du mouvement perpétuel.

Avant la roue de Hesse, il en avait paru une autre en Angleterre, qui avait eu aussi beaucoup d'admirateurs. Voici ce qu'on trouve à ce sujet dans la Physique du D.r *Désaguliers*, et ce qu'il a tiré lui-même d'un livre publié par le *marquis de Worcestre* en 1665 sous le titre de *Centuries d'inventions*. Telles sont, dit-il, les propres

paroles de l'auteur : « Faire en sorte que tous les poids du côté descendant d'une roue soient toujours plus éloignés du centre, que ceux du côté montant, et qu'ils soient encore égaux en nombre de part et d'autre. La chose serait tout-à-fait incroyable si on ne l'avait pas vue : mais on en fit l'expérience dans la mer sous ma direction, en présence du feu Roi, de deux ambassadeurs extraordinaires, du duc de Richemond, du duc Hamilton, et de toute la cour qui les accompagnait. La roue avait *quarante* pieds de hauteur, et portait *quarante* poids de *cinquante* livres chacun. Guillaume Balfore, lieutenant de la Tour, et plusieurs autres peuvent encore l'attester. Ils virent tous qu'aussitôt que ces grands poids eurent passé le diamètre vertical du côté le plus bas, ils furent suspendus à *un pied* plus près du centre ; et qu'aussitôt qu'ils eurent passé le même diamètre du côté supérieur, ils furent suspendus à *un pied* plus loin. On peut juger des conséquences. »

Telle est la relation du marquis de Worcestre, homme très-digne de foi, et extrêmement habile en mécanique, puisque c'est à lui que l'on doit la première idée des machines à vapeur. On croirait d'abord d'après ce récit que l'on avait trouvé à cette époque une machine, qui pouvait se mouvoir d'elle-même et par le seul effet de l'inégale pesanteur de ses parties. C'est cependant ce que l'auteur des Centuries ne dit pas formellement, et ce que nie le D.r *Désaguliers* par des raisons fondées sur les lois connues de la gravité. Le marquis de Worcestre ne nous ayant pas fait connaître la construction de cette roue, et ne nous ayant point expliqué par quel moyen les poids qui s'étaient approchés du centre, s'en éloignaient ensuite, nous ne pouvons pas *analyser*

cette machine, ni comparer l'avantage résultant de l'excès de distance des poids, avec l'effort qu'il fallait faire pour les éloigner ainsi du centre. Il est plus que probable, en supposant que la pesanteur agissait ici toute seule, que ces deux choses étaient égales, et que par conséquent il ne pouvait résulter de la disposition des différentes parties de cette machine, un mouvement spontané et sans fin. C'est ce qui est encore suffisamment prouvé par l'oubli total où cette grande machine est tombée. Voilà donc deux inventions, et ce ne sont pas les seules, ayant pour but de produire un mouvement perpétuel, que le temps a jugées, et qui se sont évanouies comme un rêve : il n'en reste aujourd'hui qu'un léger souvenir, comme de tentatives infructueuses pour arriver à la solution d'un problème réputé impossible.

Cependant on a encore dans ces dernier temps montré à *Lyon* une petite roue, que l'auteur assurait se mouvoir d'elle-même et sans fin. Cette machine a été exposée aux regards du public; et chacun a pu voir, qu'aussitôt qu'on ôtait ce qui faisait obstacle à son mouvement, elle commençait à tourner sur son centre, et continuait ainsi pendant un temps en apparence indéfini. La construction d'ailleurs en était fort simple. C'était une roue à la circonférence de laquelle étaient attachés à *charnière* douze petits léviers de poids égal, qui d'un côté s'alongeaient dans le sens des rayons de la roue, et de l'autre demeuraient suspendus à sa circonférence. Par cette disposition, le nombre des léviers étant le même de part et d'autre de la verticale qui passe par le centre de la roue, il est visible que le poids de ceux qui sont développés, et qui agissent à une plus grande

distance du centre du mouvement, doit l'emporter sur la résistance des autres, qui se trouvent placés plus près de ce centre ; et comme cela a lieu dans toutes les positions de la roue, il semble d'abord que le mouvement doit s'y établir de lui-même, et ne jamais s'arrêter. Mais si l'on fait attention que les léviers *inactifs*, étant arrivés vers le haut de la roue, doivent se redresser et tourner autour de leur point de suspension, pour devenir *agissans* en passant de l'autre côté ; alors on commencera à entrevoir que l'obstacle qu'ils opposent dans leur redressement, pourrait bien être équivalent à tout l'avantage qui résulte de leur développement. Une construction géométrique va nous faire connaître au juste la valeur de cet obstacle pour un lévier donné.

Dans la machine que nous examinons, les léviers se relèvent 1.° au moyen d'un petit rouleau fort mobile, placé vers le haut de la roue, un peu à gauche de son diamètre vertical, et tout-à-fait indépendant de cette roue ; 2.° par le secours d'un crochet porté par chaque lévier tout près de son origine, et perpendiculaire, ou à peu près à sa longueur. Lorsque par le mouvement circulaire de la roue, le point d'attache du lévier est arrivé à une certaine hauteur, le crochet dont il est armé, saisit le rouleau ; et la résistance de celui-ci, qui peut bien tourner sur lui-même, mais non être déplacé, oblige le lévier de quitter la position verticale et pendante qu'il avait conservée jusque-là, et de tourner autour de son point de suspension. Ce lévier tourne donc en effet, et il a achevé à peu près une demi-révolution, lorsqu'il est arrivé tout-à-fait au haut de la roue, d'où il passe du côté opposé, et se développe totalement pour agir comme *puissance*, de *résistance*

qu'il était auparavant. Deux rouleaux semblables sont placés des deux côtés du plan de la roue, parce qu'afin d'empêcher que les léviers ne se gênent mutuellement, ils sont distribués alternativement, six sur une face, et six sur l'autre.

Maintenant nous trouverons facilement de la manière suivante l'effort nécessaire pour redresser un de ces léviers. Deux forces agissent ici autour du point où le lévier est attaché, le *poids* du lévier qui se fait sentir suivant la verticale menée par son centre de gravité, et la *résistance* du rouleau qui est dirigée par son centre et par le point où le crochet touche sa circonférence. Ces deux forces se faisant mutuellement équilibre à chaque instant, sont donc entre elles *réciproquement* comme les perpendiculaires abaissées de l'origine du lévier sur leurs directions. Ces perpendiculaires peuvent donc dans tous les cas servir à les représenter.

Soit donc SG (fig. 97) un des léviers ascendans, qui commence à se relever. Par son centre de gravité G menons la verticale GR, et par le centre du rouleau et le point de tangence du crochet ST, la droite CR : ce seront là les directions des deux forces qui se font équilibre dans ce moment : leurs grandeurs sont réciproques aux perpendiculaires GK et ST. Si donc de leur point de concours R on prend sur leurs directions les quantités RP égale à GK, et RN égale à ST, et qu'on achève le parallélogramme, on aura RQ pour la résultante des deux forces, ou pour la mesure de l'effort qui se fait sur le point S de la roue où le lévier est attaché. Cet effort se fait dans le sens SR, c'est-à-dire dans un sens contraire au mouvement de la roue; et c'est là l'obstacle que le lévier oppose dans ce moment, et qui doit être

vaincu per le côté prépondérant. La direction de RQ passe nécessairement par le point S, et c'est à ce point que cette résultante doit être censée appliquée. On en aura facilement la valeur en cherchant combien de fois le côté PR du parallélogramme est contenu dans la diagonale RQ. Il y est ici près de *deux fois*. Donc la résistance de notre lévier en redressement est équivalente à une masse *deux fois* aussi grande que celle du lévier, et qui agirait sur le point S dans la direction SR.

Si cette direction SR était *tangente* à la circonférence de la roue, cette valeur serait aussi celle qu'aurait à vaincre la puissance qui agit sur la roue ; et le lévier que nous considérons, opposerait au mouvement de cette roue dans la position où il est, le même obstacle qu'une masse *deux fois* aussi grande, qui serait appliqué à l'extrémité de son rayon horizontal. Mais si SR n'est pas tangente, on la décomposera en deux forces, l'une dirigée vers le centre de la roue, et dont le seul effet est d'augmenter la pression sur ce point, l'autre agissant suivant la tangente, et s'opposant toute entière au mouvement. On aura de même la grandeur de celle-ci en comparant la droite qui sert à l'exprimer, avec celle PR qui représente le poids du lévier. (1)

---

(1) Comme les constructions géométriques ne peuvent pas être très-multipliées, on peut avoir ici recours au calcul, et chercher une formule générale qui soit applicable à toutes les positions du lévier en redressement. Or voici cette formule que l'on trouve aisément en plaçant l'origine des coordonnées au centre de la roue; $R = \frac{P}{br}\left[x'(b \pm l \sin a \cos a) + ly' \cos^2 \frac{a}{P}\right]$. C'est la valeur de la résistance qu'oppose un des léviers ascendans.

La méthode que l'on vient d'exposer, sert à faire connaître à chaque instant quelle est la resistance qu'opposent les léviers en redressement; et l'on peut ainsi dans toutes les positions de la roue, comparer la puissance des léviers descendans, avec la résistance des léviers montans. Il y a telle inclinaison de ceux-ci, où un seul résiste autant qu'une masse *cinq* ou *six fois* plus grande attachée à la circonférence de la roue. Or si l'on fait les constructions convenables, on trouvera que la somme des puissances qui agissent d'un côté de la roue, est tantôt plus grande, tantôt plus petite, que la somme des résistances qui agissent du côté opposé; que par conséquent l'équilibre doit nécessairement s'établir entre elles, et qu'il ne peut en aucune façon de la disposition ci-dessus résulter de mouvement qui soit de quelque durée.

Au reste nous ne sommes entrés dans tous ces détails, que pour donner un exemple de la manière dont une machine doit être analysée. Car pour prouver l'absurdité des prétentions de l'inventeur de celle-ci, et faire

---

P est le poids du lévier, r est le rayon de la roue, b est la longueur du crochet depuis l'origine du lévier jusqu'au point où il touche le rouleau, l est la longueur du lévier depuis le point d'attache jusqu'à son centre de gravité, a est l'angle qu'il fait avec l'horizontale; x', y' sont les coordonnées du point de la roue où le lévier est attaché. Au moyen de cette formule on peut calculer la résistance qu'oppose un lévier montant à tous les instans de son redressement; et en faisant une somme des résistances qui ont lieu d'un côté, on la trouvera en général équivalente à la somme des puissances qui agissent de l'autre côté.

voir que le mouvement devait y être produit par quelque agent étranger qu'il avait eu soin de dérober aux regards, il suffisait de partir de ce principe immuable : que des poids tombés d'une certaine hauteur, ne peuvent jamais par eux-mêmes, ni par la manière dont ils agissent les uns sur les autres, remonter à toute la hauteur d'où ils sont tombés. Or dans la machine analysée, si l'on fait faire à la roue un *douzième* de sa révolution, et que chaque lévier prenne ainsi la place du lévier précédent, on reconnaîtra facilement, que la somme des hauteurs parcourues par les léviers descendans, est toujours *égale* à la somme des hauteurs dont s'élèvent les léviers montans : ce que ne peut faire la pesanteur seule des léviers, et qui était dû par conséquent à quelque action étrangère à la machine. Il y avait donc ici une supercherie qui fut bientôt dévoilée ; et moins heureux, ou moins adroit qu'*Orfiréus*, l'auteur fut obligé de disparaître, et d'aller cacher sa honte dans quelque coin.

NOTE (*d*).

L'expérience rapportée dans le texte est une expérience remarquable ; et il faut que nous fassions voir comment nous avons trouvé toutes les conséquences qui sont consignées dans cet endroit. D'abord nous ne connaissons ici que le temps pendant lequel la balle est demeurée en l'air : la vitesse de projection nous est inconnue, ainsi que la vitesse au retour. Tout ce que nous pouvons établir d'abord, c'est qu'elle a mis pour monter moins de *dix* secondes. Car c'eût été là le temps de son ascension, si elle n'avait eu que

la pesanteur à combattre. La résistance de l'air en lui opposant un obstacle de plus, a été cause que son mouvement s'est épuisé plus vite, et la durée de son ascension a dû par conséquent être moindre que *dix* secondes.

Mais pendant combien de temps la balle est-elle donc montée ? C'est ce qu'on ne peut savoir que par le tâtonnement. On fait donc différentes suppositions, et l'on calcule d'après cela quel est l'espace que la balle a parcouru en montant, en ayant égard à la fois à la résistance de l'air, et à l'action de la pesanteur. L'on calcule de même la hauteur dont elle est tombée pendant le reste du temps par l'effet de la pesanteur seule, et en tenant également compte du ralentissement produit par la résistance du fluide atmosphérique. S'il y a égalité entre ces deux espaces, c'est une preuve que l'on a rencontré juste, et que le temps de la montée et celui de la descente sont tels qu'on les a supposés : sinon un petit nombre d'hypothèses mènera bien vite au résultat désiré. Il faut observer ici qu'il n'est pas nécessaire de connaître d'avance la vitesse de projection. On la conclut facilement d'après la durée de l'ascension ; de façon que la connaissance du temps suffit seule pour déterminer toutes les circonstances du mouvement de la balle.

On trouve dans les Traités de mécanique de MM. *Francœur* et *Poisson*, les formules nécessaires pour la solution du présent problème. (1) Mais avant d'en

---

(1) Formules pour l'ascension; $T = \frac{1}{ag}$ arc (tang $= aV$);
$E = \frac{1}{2a^2g} \log (1 + a^2 V^2)$; $V = \frac{1}{a}$ tang (arc $= agT$).

faire le calcul, il faut connaître la valeur de la résistance que l'air oppose au mouvement ; et cette connaissance ne peut être donnée que par l'expérience. C'est elle qui nous a appris qu'une surface plane d'*un pied quarré* mue avec une vitesse d'*un pied* par seconde, éprouvait de la part de l'eau une résistance équivalente à 18 *onces et deux tiers*, ou $\frac{56}{3}$ d'*onces*. L'air étant 800 fois moins dense que l'eau, la résistance de ce fluide sur la même surface sera 800 fois moindre, ou de $\frac{7 \text{ onc.}}{300}$ = 0,0233 d'*once*. Mais la balle de notre expérience n'ayant que $4\frac{1}{2}$ *lignes* de diamètre, la surface de son grand cercle n'était guère que de 16 *lignes quarrées* : ce qui, en prenant la moitié, comme l'exige la théorie du choc sur la sphère, se réduit à 8 *lignes quarrées*, ou à $\frac{1}{2592}$ de *pied quarré*. La résistance de l'air étant donc encore diminuée suivant le rapport des surfaces, on trouve finalement qu'elle n'était pour notre balle, et en ne supposant à celle-ci qu'*un pied* de vitesse par seconde,

---

Formules pour la descente; $T' = \frac{1}{2ag} \log \frac{1 + aV'}{1 - aV'}$; $E' = \frac{1}{2a^2 g} \times - \log (1 - a^2 V'^2)$; $V' = \frac{V}{\sqrt{1 + a^2 V^2}}$; $a = \sqrt{\frac{m}{g}}$. T, E, V sont les initiales des mots *temps*, *espace*, *vitesse*. Ces lettres sont marquées d'un accent pour le retour. m est la résistance du milieu pour un pied de vitesse. g est la gravité, ou 30p. de vitesse par seconde. C'est le poids du mobile, lorsque la résistance du milieu est exprimée en onces.

que de 0,000009 d'*once*. Or la balle pesait 0,1956, ou pour abréger, *deux dixièmes d'once*. Ainsi mue avec un pied de vitesse, elle perdait par la résistance de l'air $\frac{1}{21733}$ de sa pesanteur, quantité tout-à-fait insensible. Mais si on lui donne une vitesse plus grande, une vitesse de 100 pieds seulement, la résistance des milieux augmentant comme le quarré de la vitesse, la perte de notre balle deviendra égale à 0,09 *d'once*, et sera à peu près équivalente à la *moitié* de son poids.

La vitesse initiale de la balle nous est inconnue, et nous n'avons pas besoin de la connaître pour notre calcul. Il nous suffit d'avoir trouvé que l'air pour un pied de vitesse, lui opposait une résistance de 0,000009 d'*once*. C'est la valeur de m dans la dernière équation. En divisant cette quantité par 0,1956 qui est le poids de la balle, il vient : 0,000046, dont la racine quarrée est : 0,0068, qui est la valeur de la quantité a, laquelle se trouve dans toutes nos formules. a valait donc 0,0068 ; $a^2 = 0{,}000046$; $ag = 0204$; $2ag = 0{,}408$; et $2a^2g = 0{,}00276$.

Maintenant si on fait le calcul des formules en partant d'une certaine hypothèse, en supposant par exemple, que le temps de l'ascension a été de *neuf* secondes, on trouvera que la balle en montant a fait plus de chemin, qu'elle n'en aurait pu faire en descendant pendant les *onze* secondes restantes ; ou qu'il lui aurait fallu plus de *onze* secondes pour descendre de toute la hauteur où elle était montée. Ainsi le temps total serait de plus de *vingt* secondes, ce qui est contraire à l'observation. On obtiendrait un résultat tout-à-

fait opposé, si l'on faisait le temps de la montée *égal* à *huit* secondes seulement : le temps du retour eût été alors de *douze* secondes, et pendant ce dernier temps la balle eût fait plus de chemin que dans le premier : ce qui est impossible. C'est donc entre ces deux limites qu'il faut se renfermer ; et l'on trouve enfin qu'en établissant que la balle soit montée pendant *huit secondes et trois quarts*, elle a dû parvenir à une hauteur de 1124 *pieds et demi* ; qu'elle a mis pour descendre *onze secondes et un quart*, et qu'elle a parcouru pendant ce temps 1125 pieds. La légère différence qu'on observe ici entre les deux espaces décrits soit en montant soit en descendant, ne peut tenir comme il est évident qu'à une très-petite fraction de seconde. Au reste la même hypothèse de 8 $\frac{3}{4}$ secondes, et nos formules nous apprennent que la vitesse initiale de la balle était de 680 pieds, et sa vitesse finale de 144 pieds seulement. Telle a été l'influence de la résistance atmosphérique.

NOTE (*e*).

Donnons ici un exemple du choc *indirect*, et cherchons quel doit être le mouvement d'un corps libre et en repos frappé par un corps en mouvement, suivant une direction qui ne passe pas par le centre de gravité du premier. Soit donc un corps M (fig. 98) dont nous représentons la masse par la même lettre M, qui est en repos, et dont le centre de gravité est en G. Soit un autre corps M′ qui vient choquer le premier en un point I suivant IK perpendiculaire à la surface de celui-ci, et avec une vitesse V. D'abord la vitesse

en avant du corps M sera la même que si la direction du choc avait passé par son centre de gravité G. Ainsi ce centre de gravité sera mu suivant la droite GE parallèle à LK ; et sa vitesse sera égale à celle que le corps choquant peut communiquer à l'unité de masse, divisée par la masse M. J'appelle V la vitesse de M' avant le choc, et v la vitesse qui lui reste après le choc. Le corps M' aura donc perdu une vitesse $V - v$, et une quantité de mouvement exprimée par $M'(V - v)$: cette quantité de mouvement a passé dans le corps choqué ; et la vitesse de celui-ci sera donc égale à $\frac{M'(V-v)}{M}$. Telle sera *la vitesse de progression* de toutes les particules du corps M.

Le point choqué outre cette vitesse de translation recevra encore une vitesse de rotation, qui en abaissant la perpendiculaire GK, et la désignant par la lettre D, aura pour expression, $\frac{DM'(V-v)}{MQ^2}$ (1). Cette vitesse de rotation est celle qui a lieu autour du centre de gravité comme s'il était fixe, et pour le point qui est à l'*unité* de distance de ce centre G. Pour le point I la vitesse de rotation sera $\frac{DM'(V-v)\times GI}{MQ^2}$: mais cette vitesse est perpendiculaire à GI : elle est moindre dans le sens IK, et cela dans le rapport de GI à GK ; elle est donc égale dans ce sens à $\frac{M'D^2(V-v)}{MQ^2}$.

(1) MQ^2 est, comme on peut se le rappeler, le moment d'inertie du corps M par rapport à un axe passant par son centre de gravité.

J'observe maintenant qu'après le choc le corps choquant et le point I doivent aller l'un et l'autre avec la même vitesse : car les deux corps sont supposés sans élasticité. Donc la vitesse qui reste au corps choquant, doit être égale à toute celle du point I dans le sens du choc; c'est-à-dire que v égale $\frac{M'(V-v)}{M}$ qui est la vitesse progressive de ce point I, *plus* $\frac{M'D^2(V-v)}{MQ^2}$ qui est sa vitesse de rotation dans le même sens. De cette égalité on tire pour la vitesse v restante après le choc: $v=\frac{VM'(D^2+Q^2)}{MQ^2+M'(Q^2+D^2)}$. Quant à la vitesse U du centre de gravité, elle devient, en mettant à la place de v la valeur qu'on vient de trouver; $U=\frac{VM'Q^2}{(M+M')Q^2+M'D^2}$, et la vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire en G sera, $W=\frac{VM'D}{MQ^2+M'Q^2+M'D^2}$.

Si l'on suppose que D est nul, auquel cas la direction du choc passe par le centre de gravité, on trouve $U=\frac{VM'}{M+M'}$, comme on l'a trouvé ci-dessus pour le *choc direct*; et il vient encore $W=0$; ce qui veut dire que la vitesse de rotation est *nulle* dans ce cas, comme cela doit être en effet. Nous pourrions encore examiner le cas où les corps qui se choquent sont élastiques : mais cet exemple doit suffire. On le trouvera d'ailleurs traité dans la Mécanique de l'abbé *Marie*.

NOTE (*f*).

On a traité dans la première Section, de tous les mouvemens qui peuvent être produits dans les corps par des forces *mécaniques*, c'est-à-dire, par des forces qui leur sont étrangères, et qui existent hors d'eux. Mais il y a aussi des forces *physiques* qui résident dans les corps, et qui sont capables d'y produire du mouvement, ou au moins de l'entretenir pendant un certain temps. Telle est la force de l'*élasticité*.

On a vu dans les Considérations préliminaires en quoi consiste cette singulière propriété qui se remarque dans quelques corps, et dont beaucoup d'autres sont privés. On a dit alors qu'elle tenait essentiellement à l'action intime que les molécules des corps exercent les unes sur les autres, et à l'arrangement forcé qu'elles ont pris entre elles. Un corps élastique est un corps dont les molécules ne peuvent être tant soit peu déplacées, sans qu'il se fasse aussitôt un effort général pour les remettre toutes à leur première place; et si cette force peut agir librement, sur-le-champ les parties se rapprochent, mais avec tant de vitesse, qu'elles outrepassent leur position primitive, pour revenir ensuite sur elles-mêmes, et faire ainsi des excursions dans les deux sens, jusqu'à ce qu'elles se soient fixées enfin dans leur premier état. Ces excursions s'appellent des *vibrations*. Elles sont d'égale durée dans un même corps quelle que soit leur étendue, pourvu que l'élasticité du corps demeure la même : elles sont plus ou moins promptes dans des corps différens, ou dans un même corps dont l'élasticité est susceptible de variation,

Le mouvement de vibration est aussi du ressort de la mécanique : mais il dépend souvent de tant de circonstances physiques difficiles à saisir, et surtout à analyser, qu'il est nécessaire d'avoir ici recours au calcul, et que souvent les ressources qu'il offre, sont insuffisantes pour déterminer ce mouvement avec quelque précision. On se contentera d'examiner dans cette Note le cas le plus simple, celui des *cordes élastiques.*

Soit donc prise en exemple une corde de métal, un de ces fils de léton tirés à la filière qu'on emploie dans les instrumens de musique. Ce fil étant attaché à un point fixe par un de ses bouts, si on le tend au moyen d'un poid suspendu à l'autre bout également retenu d'une manière fixe, ce fil se trouvera alors en état de *vibrer;* et si l'on vient en effet à le pincer par quelque point pris vers le milieu de sa longueur, on le verra aussitôt qu'il sera libre, aller et venir avec plus ou moins de vitesse, jusqu'à ce qu'il ait repris sa position en ligne droite. On pourrait même compter les vibrations qu'il fait dans une *unité* de temps, en lui donnant une suffisante longueur, et n'employant pour le tendre qu'un poids médiocre. Ce qui produit ce mouvement alternatif, c'est d'une part la *force attractive* que les molécules dérangées exercent les unes sur les autres, et d'autre part la *tension* produite par le poids. Celle-là demeure la même dans une corde donnée; et que cette corde ait été au premier instant plus ou moins écartée de sa position primitive, elle est toujours ramenée par elle avec la même vitesse, et ses vibrations, comme les oscillations du pendule, se font dans des temps sensiblement égaux.

Mais si la force de tension vient à changer, alors la corde étant sollicitée par une force ou plus grande ou plus petite, son retour se fera avec plus ou moins d'impétuosité, et les vibrations seront par conséquent ou plus promptes ou plus lentes. Le raisonnement et l'expérience ont également appris que *le nombre des vibrations dans un temps donné était proportionnel à la racine quarrée des poids qui tendent la corde.* Sous une tension *quadruple* la même corde fait un nombre de vibrations *double*, et par suite la durée de chaque vibration est réduite à la *moitié.* C'est la première loi concernant cette espèce de mouvement considéré dans les cordes élastiques.

Changeons maintenant la grossseur de la corde en lui conservant la même longueur, et la chargeant du même poids. La masse à mouvoir sera plus considérable : mais l'action mutuelle des molécules étant toujours en raison de leur nombre, les vibrations à cet égard devraient encore se faire avec la même vitesse que tout à l'heure, si elles ne dépendaient que de cette seule cause. Mais le même poids ne peut évidemment pas tendre au même point une corde plus grosse; il ne peut pas ramener avec la même force une masse plus pesante : d'où il suit que les vibrations dans le cas présent se feront avec plus de lenteur, ainsi que l'expérience le fait voir. On a trouvé que pour des cordes de même matière, également longues, également tendues, les *nombres des vibrations sont en raison inverse des rayons de ces cordes*, et par conséquent *leur durée est directement comme ces rayons.* Deuxième loi relative aux cordes vibrantes.

Enfin faisons varier la longueur de la corde, et

laissons-lui la même grosseur et la même charge. Il est aisé de voir que la force de traction ayant alors une file de molécules plus longue ou plus courte à mettre en mouvement, elle aura pour cela plus de peine dans le premier cas, et moins dans le second. Les retours de la corde élastique se feront donc *plus vite* à mesure qu'elle aura *moins de longueur ;* et l'on a reconnu que *le nombre des vibrations était exactement en raison inverse des longueurs des cordes, et leur durée en raison directe de ces mêmes longueurs.* C'est la troisième loi du mouvement vibratoire des cordes élastiques.

Telles sont les lois qui règlent l'espèce de mouvement que nous considérons ici. On a supposé que les cordes étaient de la même matière ; si elles étaient faites de matières différentes, il faudrait encore avoir égard à leur poids, ou plutôt à la pesanteur spécifique de la matière dont elles sont faites. Au reste toutes ces lois sont renfermées dans la formule ci-dessous. (1)

---

(1) Si l'on appelle t la durée d'une vibration, l la longueur de la corde, m son poids, p le poids qui la tient tendue, g la grávité, on aura, $t = \sqrt{\frac{lm}{2gp}}$. La demi-épaisseur de la corde étant r, et exprimant par n son poids spécifique, et par k le rapport de la circonférence au diamètre, on a, $m = kr^2ln$. En substituant il vient, $t = lr\sqrt{\frac{kn}{2gp}}$. C'est la durée d'une vibration pour une corde élastique donnée.

NOTE (*g*).

Une balance fort jolie dans le genre de celle de *Sanctorius*, est celle dont on voit la coupe dans la figure 99. PP est un plateau de cuivre sur lequel on pose les corps qu'on veut peser. Ce plateau est suspendu par deux chaînes aux léviers LL, L'L' qui sont divisés de la même manière, et ont l'un et l'autre leur point d'appui à leur extrémité. Ces léviers sont portés par une traverse supérieure, et les points de suspension du plateau sont au *cinquième* de leur longueur à compter de l'extrémité fixe. Celle qui est libre est donc sollicitée à descendre par une force égale seulement à la *cinquième* partie du fardeau. Il est visible que les deux léviers portant chacun la moitié de ce fardeau, le cinquième de cette moitié se fait sentir à l'extrémité qui est libre ; et comme ils agissent tous les deux sur le même point, et dans le même sens, c'est donc en effet à la *cinquième* partie du total qu'il faudrait faire équilibre à ce point-là.

Au-dessus de ces deux léviers, et parallèlement à eux est placé un troisième lévier FF divisé par son point d'appui en deux parties fort inégales. Au bras le plus court sont attachées les extrémités libres des deux premiers léviers ; et le bras le plus long soutient un petit bassin, où l'on met les contre-poids nécessaires pour l'équilibre. Le rapport des deux bras de ce dernier lévier étant ordinairement celui de *dix* à *un*, on voit qu'*une once* dans le bassin en vaudra *dix* à l'autre bout du lévier, et fera par conséquent équilibre à un poids de *cinquante* onces posé sur le plateau.

Ces sortes de balances où l'on conclut du petit au grand, ne peuvent pas être aussi précises que les balances ordinaires à bras égaux. Mais celle-ci, lorsqu'elle est bien exécutée, est susceptible encore d'une assez grande exactitude; et elle peut être fort commode dans bien des circonstances.

NOTE (*h*).

Voici encore une autre espèce de balance qui est assez ingénieuse, et qui pourrait être de quelque utilité. C'est un quart de cercle (fig. 100) posé solidement sur un pied dans un plan vertical. Au centre du quart de cercle, et dans le même plan, est fixée une poulie qui peut tourner sur son axe, et qui fait mouvoir avec elle un rayon solide ou *index*. Celui-ci dans son mouvement rase le limbe du quart de cercle, et en parcourt les divisions par son extrémité libre. Un cordon de soie est attaché à la circonférence de la poulie, et porte un bassin où l'on met les corps qu'on veut peser. Lorsque la balance est à vide, l'index se tient dans une position verticale, et passe par *zéro*.

Maintenant si l'on met un corps quelconque dans le bassin, l'index tournera autour de l'axe, et son centre de gravité s'élèvera plus ou moins pour l'équilibre. C'est le poids de cet index qui fait ici les fonctions de puissance; et cette puissance devient plus grande, à mesure que le point où elle réside, s'éloigne davantage de la verticale abaissée du centre de mouvement. L'équilibre établi, ce qui se fait à l'instant même et sans tâtonnement, l'index montre sur les divisions du limbe le véritable poids du corps mis en expérience.

Pour étendre l'usage de cette balance, la poulie porte plusieurs gorges de différens diamètres, le rayon mobile se charge d'une petite masse à son extrémité libre, et des divisions correspondantes sont tracées sur le limbe du quart de cercle.

Une balance fondée sur le même principe que la précédente, mais dont la construction est différente, est celle dont on voit la figure n.° 101, et à laquelle l'inventeur (1) a donné le nom de *balance-pendule*. C'est une large lame de métal suspendue à un point fixe, autour duquel elle peut faire des oscillations. Elle porte par en haut un bras de lévier fort court, où l'on accroche le bassin ou plateau sur lequel se placent les corps à peser. On voit par cette courte description que c'est encore le poids de la lame de métal réuni à son centre de gravité, qui fait ici la fonction de puissance; et qui se met en équilibre avec le fardeau, en s'éloignant plus ou moins de la verticale qui passe par le point fixe.

Il reste à expliquer comment cette balance peut faire connaître le poids du corps posé dans le bassin; et c'est en ceci principalement qu'elle diffère de la précédente. Dans la lame principale sont renfermées deux lames beaucoup moindres qui, lorsqu'on veut faire usage de la balance, se séparent de celle-ci en tournant sur leurs charnières, et s'alongeant dans le même plan l'une à droite et l'autre à gauche, l'une en haut et l'autre en bas : elles sont tenues parallèles entre elles au moyen d'une traverse. La lame infé-

(1) Le S.r Dumont de Metz.

rieure est celle qui porte les divisions : elle passe sous la verge de suspension, et fait connaître par le point où celle-ci la rencontre, quel est le poids du corps mis en expérience.

Cette espèce de balance paraît réunir plusieurs avantages, principalement sur celles que l'on nomme *Romaines*. Le service en est prompt et sûr. On peut aussi en étendre l'usage par un poids additionnel. Abandonnée à elle-même, les oscillations en seraient fort longues : mais on peut avec la main les arrêter promptement. L'auteur a pris en 1816 un brevet d'invention.

FIN DES NOTES.

TABLE.

SECTION DEUXIÈME.

STATIQUE.

FIN DE LA TABLE.

Fautes à corriger.

Pag. 47, ligne 18 ; au lieu *de deux*, lisez *des deux*.
Pag. 90, Note (3) ; ***au lieu de*** u $= V'$, ***lisez*** u $= - V'$.
Pag. 265, Note (4) ; lign. dern. ***lisez*** $Q^2 = \frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{4} a^2$.
Pag. 274, lign. avant-dern. ; ***au lieu de*** CK, ***lisez*** GK.
Pag. 429, lign. 14 ; ***au lieu de*** MN, ***lisez*** MV.

AUTRES OUVRAGES DE L'AUTEUR.

Étude du Ciel, ou Connaissance des phénomènes célestes, mise à la portée de tout le monde. 1 vol. in-8.° avec figures, imprimé chez les Frères *Périsse*, à Lyon. Se trouve chez eux.

Hydraulique physique, ou Connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement considérés dans les fluides. 1 vol. in-8.° avec figures, imprimé à Lyon chez *Ballanche*, et se trouve chez *Rusand* et chez l'Auteur.

Gnomonique graphique, ou Méthode simple et facile de tracer les cadrans solaires. 1 vol. in-8.° avec figures, imprimé à Paris chez Madame *Courcier*, et se trouve chez la même.

Gnomonique analytique, imprimée à Lyon chez *Ballanche*, et se trouve à Lyon chez l'Auteur.







